교육과학기술부 검정
2009. 7. 31.

고 등 학 교

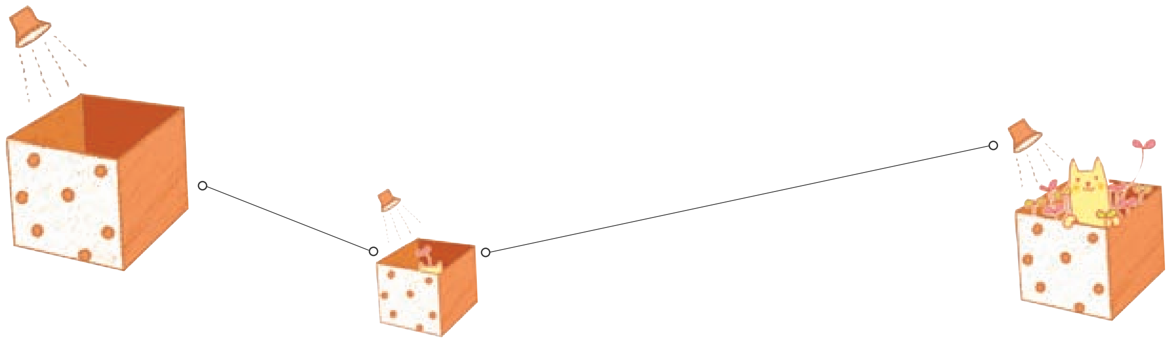
적분과 통계 익힘책

이강섭 | 왕규채 | 송교식 | 양인웅

(주)지학사

들 어 가 는 말

학습은 배우고(學) 익히는(習) 것입니다. 모든 교과가 그렇지만 특히, 수학 학습에서는 익힘이 중요합니다. 그동안 우리의 수학 교육에서는 익힘보다는 배움을 위주로 하였습니다. 학습자 개개인의 차이가 있음에도 불구하고 단일 수업의 가르침과 배움만이 있었습니다. 그러나 다행스럽게도 개정 교육과정에서는 배움과 익힘의 양 날개로 효율적인 수학 학습의 토대를 마련하였습니다.



이 익힘책은 교과서 본 책에서 배운 수학적 지식과 기능을 학습자의 수준에 따라 스스로 익혀, 자연과 사회의 여러 가지 현상을 수학적으로 고찰하고 주어진 문제를 합리적으로 해결하는 능력을 기르도록 저술하였습니다.

이를 위하여 각 소단원별로 바탕 다지기, 기본 익히기, 실력 키우기의 문제를 제공하여 수준별 자기 주도적 학습이 가능하도록 하였습니다. 또, 흥미롭고도 효율적인 학습을 위하여 읽기 자료, 공학 도구, 프로젝트, 실생활 문제 해결하기, 실생활 이야기, 수학자 이야기 등을 곳곳에 수록하였습니다. 반복 연습 또는 문제 풀이가 지루하다고 느낄 때, 이러한 코너에서 시원함을 느끼고 새로운 시야를 확보하기 바랍니다.

수영 선수는 1초를 단축하기 위하여 수천, 수만 시간을 훈련합니다. 피겨 스케이팅 선수도 몇 분간의 연기를 위하여 수천, 수만 시간을 얼음판 위에서 보냅니다. 사진작가는 단 한 장면을 포착하기 위하여 수천 장의 필름을 사용합니다. 화가의 한 작품 뒤에는 수천 장의 데생과 수없는 불면의 밤이 있습니다. 아무런 연습 없이, 끊임없는 익힘 없이 소정의 성과를 거둘 수는 없습니다. 이것은 수학 학습에서도 마찬가지입니다.

이 책으로 수학을 학습하는 여러분이 모두 수학자가 되기를 원하지는 않습니다. 여러분의 대다수는 수학 이외의 분야로 진학하고 진출할 것입니다. 그러나 여러분이 어떤 분야를 선택하더라도 수학 학습에서 배우고 익힌 것은 여러분의 발전의 토대가 될 것이고, 앞날의 등대가 될 것입니다. 이 책을 통하여 여러분의 사고력과 문제 해결력, 창의력을 증진시켜 행복한 삶을 누리기 바랍니다.

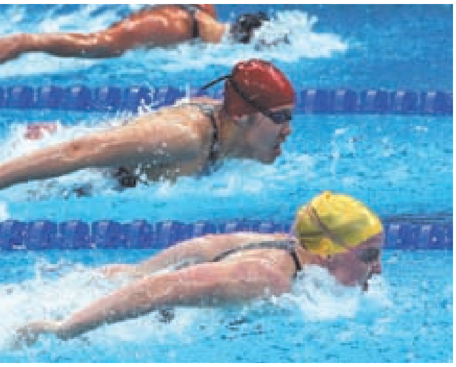
지은이 씀

차 례 CONTENTS

I 적분법

II 순열과 조합

III 확률

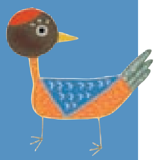


IV 통계



부록*

이 책의 구성



이 책은 2007년 개정 교육과정의 정신을 반영하여, 학생들의 적성과 능력에 맞추어 자기주도적 학습에 적합하도록 구성하였다. 특히, 교과서와의 연계를 긴밀히 하여 다양한 형태의 학습이 가능하도록 하였으며, 학습자의 사고력, 창의력, 의사소통 능력을 기를 수 있도록 쉽고 재미있게 구성하였다.

적분과 통계
익힘책
| 교과서 연계 학습 |

대단원
· 실생활 이야기
· 수학자 이야기

중단원
· 학습 목표
· 실생활 관련 동기 유발
· 선수 학습 확인
_내용 정리
_진단 평가

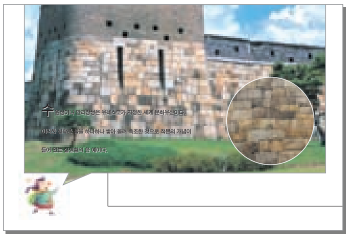
소단원
· 교과서 연계 학습
· 학습 내용 정리
· 개념 넓히기
· 수준별 학습 ┌ 바탕 다지기-함께하기, 스스로 하기
├ 기본 익히기
└ 실력 키우기

대단원 확인하기
· 읽기 자료_창의력
· 공학 도구_사고력
· 프로젝트_의사소통 능력
· 실생활 문제 해결하기_문제 해결력
· 논술 / 수행 평가 과제_탐구력

| 단원 도입 및 선수 학습 |

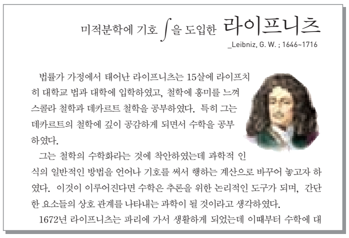
실생활 이야기

학습의 실마리가 되는 생활 소재를 만화 및 사진으로 구성하여 학습 주제에 쉽고 재미있게 다가서도록 하였다.



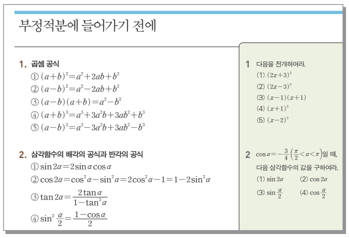
수학자 이야기

대단원 학습에 관련된 수학자의 업적과 일화를 소개하여 학습의 흥미를 높이도록 하였다.



~에 들어가기 전에

중단원 학습에 필요한 선수 학습의 내용 정리와 함께 진단 평가 문항을 제시하였다.



| 교과서와 연계된 학습 |

학습 내용 정리_교과서에서 익힌 학습 내용을 정리하였으며, □ 채우기를 통하여 보다 효율적으로 습득하도록 하였다.
내용 정리가 부족한 학생은 개념을 다시 확인할 수 있도록 교과서와 연계하였다.

개념 넓히기_교과서에서 다룬 개념, 방법 등을 깊이 있게 설명하고 사고력을 넓혀 심화학습이 가능하도록 하였다.

| 자기주도적 학습 방법 |

바탕 다지기_함께하기(예제)와 스스로 하기(유제)를 제시하여 기초적인 학습 내용을 확인하도록 하였으며 보충학습이 가능하도록 하였다.

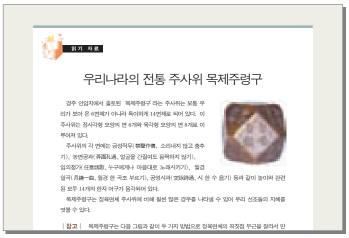
기본 익히기_기본적인 학습 내용을 확인하는 문제를 제시하였으며 오류 유형을 소개하였다.

실력 키우기_학습 내용을 응용, 활용할 수 있는 문제를 제시하여 심화학습이 가능하도록 하였으며, 또 오류 유형을 소개하였다.

| 수학적 가치 함양 |

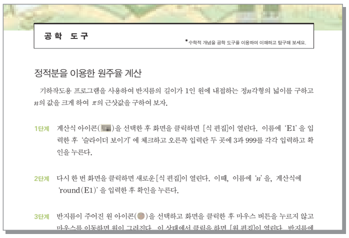
읽기 자료

단원과 관련된 상식을 소개하여 수학 학습의 흥미를 높일 수 있도록 하였다.



공학 도구

계산기, 컴퓨터 프로그램 및 인터넷을 활용하여 수학적 사고력 향상에 도움이 되도록 하였다.

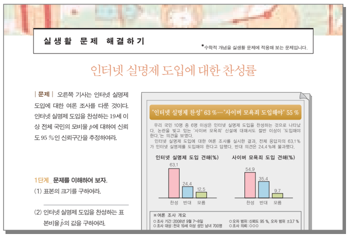


프로젝트

수학적 개념을 보다 깊이 있게 탐구하고 적용하는 문제로서, 다양한 방법으로 학습 내용을 활용할 수 있도록 하였다.

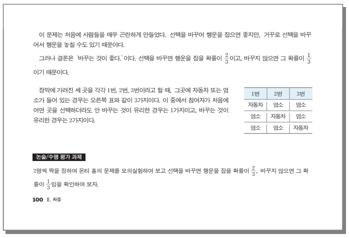
실생활 문제 해결하기

문제 해결 전략을 활용하여 실생활의 문제 해결력을 기르도록 하였다.



논술/수행 평가 과제

학습 내용을 바탕으로 여러 가지 문제 해결 상황을 제시하고 해결해 보도록 하였다.



| 학습 평가 |

대단원 확인하기

대단원 학습의 마무리로서 문항별로 난이도와 계산, 이해, 추론 등의 수학적 능력 항목을 제시하여 학습 전략을 스스로 찾아가도록 하였다.

 계산기를 활용할 수 있는 문제이다.

I 적분법

수원성이나 만리장성은 유네스코가 지정한 세계 문화유산이다. 이러한 성곽은 돌을 하나하나 쌓아 올려 축조한 것으로 적분의 개념이 들어 있는 실생활의 한 예이다.

미적분학에 기호 $\int$을 도입한 라이프니츠

_Leibniz, G. W. ; 1646~1716

법률가 가정에서 태어난 라이프니츠는 15살에 라이프치히 대학교 법과 대학에 입학하였고, 철학에 흥미를 느껴 스콜라 철학과 데카르트 철학을 공부하였다. 특히 그는 데카르트의 철학에 깊이 공감하게 되면서 수학을 공부하였다.

그는 철학의 수학화라는 것에 착안하였는데 과학적 인식의 일반적인 방법을 언어나 기호를 써서 행하는 계산으로 바꾸어 놓고자 하였다. 이것이 이루어진다면 수학은 추론을 위한 논리적인 도구가 되며, 간단한 요소들의 상호 관계를 나타내는 과학이 될 것이라고 생각하였다.

1672년 라이프니츠는 파리에 가서 생활하게 되었는데 이때부터 수학에 대한 연구를 적극적으로 하게 되었다. 그는 기호를 만드는 것에 관심을 가지고 여러 가지 새로운 기호를 수학에 도입하였다. 1684년에 발표한 미분법에 대한 논문에서는 미분과 적분이 역연산 관계에 있다는 것을 설명하였고, 부정적분을 정적분으로부터 분리시켜 적분상수까지도 생각하였다.

1 부정적분

학습 목표

- 부정적분의 뜻을 알고, 여러 가지 함수의 부정적분을 구할 수 있다.
- 치환적분법과 부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

1. 부정적분의 뜻과 여러 가지 함수의 부정적분　　2. 치환적분법과 부분적분법

뺄셈과 나눗셈은 각각 덧셈과 곱셈의 역연산이고, 다항식의 인수분해는 전개의 역과정이다. 미분과 적분 사이의 관계도 이와 유사하다. 드모르간(De Morgan, A. ; 1806～1871)은 이와 같은 미분과 적분의 관계를 일컬어 '적분은 미분의 회상'이라고 하였다.

이렇게 거꾸로 생각하는 역발상은 창의적 문제 해결력을 기르기 위한 중요한 도구이다.

부정적분에 들어가기 전에

1. 곱셈 공식

① $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
② $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
③ $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$
④ $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
⑤ $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

2. 삼각함수의 배각의 공식과 반각의 공식

① $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$
② $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$
③ $\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$
④ $\sin^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1-\cos\alpha}{2}$
⑤ $\cos^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1+\cos\alpha}{2}$
⑥ $\tan^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$

3. 도함수

① 함수 $y=f(x)$의 도함수는

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

② α가 실수일 때

$$(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$$

4. 여러 가지 미분법

미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

① 곱의 미분법

$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

② 몫의 미분법

$\left\{\dfrac{f(x)}{g(x)}\right\}'=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$ (단, $g(x)\neq 0$)

③ 합성함수의 미분법

$\{f(g(x))\}'=f'(g(x))g'(x)$

1 다음을 전개하여라.

(1) $(2x+3)^2$
(2) $(2x-3)^2$
(3) $(x-1)(x+1)$
(4) $(x+1)^3$
(5) $(x-2)^3$

2 $\cos\alpha=-\dfrac{3}{4}\left(\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi\right)$일 때, 다음 삼각함수의 값을 구하여라.

(1) $\sin 2\alpha$　　(2) $\cos 2\alpha$
(3) $\sin\dfrac{\alpha}{2}$　　(4) $\cos\dfrac{\alpha}{2}$

3 다음 함수의 도함수를 구하여라.

(1) $y=x^2$　　(2) $y=x^3$
(3) $y=\sqrt{x}$　　(4) $y=\dfrac{1}{x}$

4 다음 함수의 도함수를 구하여라.

(1) $y=e^x\sin x$
(2) $y=(x^2+1)^{10}$
(3) $y=(x^2+1)^{1000}$

1. 부정적분의 뜻과 여러 가지 함수의 부정적분

* $\boxed{}$ 안에 알맞은 것을 채워 가면서 교과서에서 학습한 내용을 확인해 보세요.

부정적분의 뜻

① 함수 $F(x)$의 도함수가 $f(x)$일 때, 즉 $F'(x)=f(x)$일 때, 함수 $F(x)$를 $f(x)$의 부정적분 또는 원시함수라 하고, 기호로 $\int f(x)dx$와 같이 나타낸다.

이때, 함수 $f(x)$를 피적분함수라고 한다.

$$\int f(x)dx \xrightarrow{\text{미분한다}} f(x) \qquad f(x) \xrightarrow{\text{적분한다}} \int f(x)dx$$

② $F'(x)=f(x)$일 때, $\int f(x)dx=\boxed{(1)}+C$로 나타낸다. 이때, C를 적분상수라고 한다.

부정적분의 성질

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

① $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$ (단, k는 상수)

② $\int \{f(x)+g(x)\}dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$

③ $\int \{f(x)-g(x)\}dx=\int f(x)dx-\int g(x)dx$

여러 가지 함수의 부정적분

① $\int x^n dx=\dfrac{1}{n+1}x^{n+1}+C$ (단, $n\neq -1$)

② $\int \dfrac{1}{x}dx=\boxed{(2)}+C$

③ $\int \sin x\,dx=-\cos x+C$

④ $\int \cos x\,dx=\boxed{(3)}+C$

⑤ $\int \sec^2 x\,dx=\tan x+C$

⑥ $\int \mathrm{cosec}^2 x\,dx=\boxed{(4)}+C$

⑦ $\int e^x dx=e^x+C$

⑧ $\int a^x dx=\boxed{(5)}+C$ (단, $a>0$, $a\neq 1$)

⋯➔ 내용 정리가 부족한 학생은 **교과서 12~20쪽**을 공부하여 개념을 확실히 익히세요.

답 (1) $F(x)$ (2) $\ln|x|$ (3) $\sin x$ (4) $-\cot x$ (5) $\dfrac{a^x}{\ln a}$

바 탕 다 지 기

*기초 개념을 확인하고 계산 능력을 기르기 위한 문제입니다.

| 함 께 하 기 |

1. 다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int (x^2-2)(x+1)dx$

(2) $\int (x+2)^2dx-\int (x-2)^2dx$

〔풀이〕

(1) $\int (x^2-2)(x+1)dx$

$=\int (x^3+x^2-2x-2)dx$

$=\int x^3dx+\int x^2dx-2\int x\,dx$

$-\int 2\,dx$

$=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-x^2-2x+C$

(2) $\int (x+2)^2dx-\int (x-2)^2dx$

$=\int \{(x+2)^2-(x-2)^2\}dx$

$=\int 8x\,dx$

$=4x^2+C$

| 스 스 로 하 기 |

1. 다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int (x^2+1)(-x+2)dx$

(2) $\int (x+1)^3dx+\int (x-1)^3dx$

〔풀이〕

(1) $\int (x^2+1)(-x+2)dx$

$=\int (-x^3+\square x^2-x+\square)dx$

$=-\int x^3dx+\square\int x^2dx-\int x\,dx$

$+\int \square\,dx$

$=-\frac{1}{4}x^4+\square x^3-\frac{1}{2}x^2+\square+C$

(2) $\int (x+1)^3dx+\int (x-1)^3dx$

$=\int \{(x+1)^3+(x-1)^3\}dx$

$=\int (\square x^3+\square x)dx$

$=\square x^4+\square x^2+C$

교과서 14, 16, 17, 18, 19, 20쪽

1 다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int 3\,dx$

(2) $\int 8x^3\,dx$

(3) $\int (-6x^2+2)dx$

(4) $\int x\sqrt{x}\,dx$

(5) $\int \frac{4}{x}dx$

(6) $\int (3\sin x+4\cos x)dx$

(7) $\int e^{x+3}\,dx$

(8) $\int (2^x+x^2)dx$

기본 익히기

*기본 실력을 확인하고 응용 능력을 기르기 위한 문제입니다.

1 다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\displaystyle\int x^2(2x+7)dx+\int(x+5)(-2x^2+3x+1)dx$

a^3-b^3
$=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

(2) $\displaystyle\int\frac{x^3}{x-1}dx+\int\frac{1}{1-x}dx$

(3) $\displaystyle\int\frac{x^2+3x-2}{x^2}dx$

(4) $\displaystyle\int(\sin x+\cos x)^2dx+\int(\sin x-\cos x)^2dx$

2 함수 $y=f(x)$에 대하여 y의 증분 $\Delta y=3x^2\Delta x+5(\Delta x)^2$일 때, 다음을 구하여라.

(1) $f'(x)=\displaystyle\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$

(1) $f'(x)$　　(2) $f(x)$

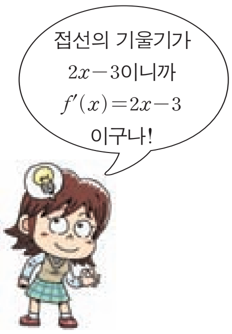
(3) $f(0)=-1$일 때, $f(-3)$의 값

3 다음 부정적분을 구하여라.

(2) $1+\tan^2 x=\sec^2 x$

(1) $\displaystyle\int(\tan x+3)\cos x\,dx$　　(2) $\displaystyle\int(x^2+\tan^2 x)dx$

(3) $\displaystyle\int\frac{2xe^x+1}{x}dx$　　(4) $\displaystyle\int\frac{4^x-x^2}{2^x+x}dx$



4 점 $(-1,\ -2)$를 지나는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(x,\ f(x))$에서의 접선의 기울기가 $2x-3$이다. 이 곡선의 방정식을 구하여라.

실력 키우기

*다양한 유형에 대한 활용 능력을 키워 실력을 향상시키는 문제입니다.

1 다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\displaystyle\int\left(x+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)dx$ (2) $\displaystyle\int\frac{(\sqrt{x}-2)^3}{x}dx$

(3) $\displaystyle\int\frac{x^4+x^2+1}{x^2+x+1}dx$ (4) $\displaystyle\int\frac{x^4}{x-1}dx+\int\frac{1}{1-x}dx$

(3) x^4+x^2+1
$=(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

2 다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\displaystyle\int\frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx$ (2) $\displaystyle\int(\tan x+\cot x)^2dx$

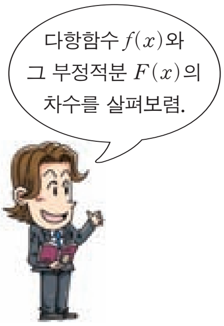
(3) $\displaystyle\int\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}dx$ (4) $\displaystyle\int\frac{8^x+1}{2^x+1}dx$

3 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

$$\{f(x)+g(x)\}'=2x+1,\ \{f(x)g(x)\}'=3x^2-2x+2$$

가 성립하고 $f(0)=2$, $g(0)=-1$일 때, 다음을 구하여라.

(1) $f(x)+g(x)$ (2) $f(x)g(x)$



4 다항함수 $f(x)$의 부정적분을 $F(x)$라고 할 때, 다음을 만족하는 함수 $f(x)$를 각각 구하여라.

(1) $F(x)=f(x)+x^3$

(2) $3F(x)=xf(x)-f(x)$, $f(0)=1$

5 연속함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가 다음과 같고, 그 그래프가 원점을 지날 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그려라.

$$f'(x)=\begin{cases}1 & (x<-1)\\ 2x & (-1<x<1)\\ -1 & (x>1)\end{cases}$$

2. 치환적분법과 부분적분법

* $\boxed{}$ 안에 알맞은 것을 채워 가면서 교과서에서 학습한 내용을 확인해 보세요.

● 치환적분법

① 변수 x를 t의 함수 $g(t)$로 바꾸어 적분하는 방법을 치환적분법이라고 한다.

② $\int f(x)dx$에서 미분가능한 함수 $g(t)$에 대하여 $x=g(t)$로 놓으면

$$\int f(x)dx=\int f(g(t))\boxed{\text{(1)}}dt$$

● $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$의 부정적분

치환적분을 이용하여 다음을 얻을 수 있다.

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln|f(x)|+C$$

| 보기 | $\int \dfrac{2x}{x^2+1}dx$에서 $(x^2+1)'=2x$이므로 $\int \dfrac{2x}{x^2+1}dx=\ln(\boxed{\text{(2)}})+C$

● 분수함수의 부정적분

① 분자의 차수가 분모의 차수보다 높은 경우에는 분자를 분모로 나누어 몫과 나머지를 분리하여 적분한다.

② 분모가 인수분해되는 경우에는 주어진 분수식을 간단한 분수식의 합의 꼴로 변형한 후 부정적분을 구한다.

● 부분적분법

① 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능할 때, $f(x)g(x)=\int f'(x)g(x)dx+\int f(x)g'(x)dx$

이므로 $\int f'(x)g(x)dx$를 구할 수 있으면 $\int f(x)g'(x)dx$를 구할 수 있다. 이를 이용하여 적분하는 방법을 부분적분법이라고 한다.

② $\int f(x)g'(x)dx=f(x)\boxed{\text{(3)}}-\int f'(x)g(x)dx$

⋯› 내용 정리가 부족한 학생은 **교과서 21~27쪽**을 공부하여 개념을 확실히 익히세요.

답 (1) $g'(t)$ (2) x^2+1 (3) $g(x)$

바탕 다지기

*기초 개념을 확인하고 계산 능력을 기르기 위한 문제입니다.

| 함께 하기 |

1. 다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int (2x+3)^5 dx$

(2) $\int 3x\sin x\, dx$

〔풀이〕

(1) $2x+3=t$로 놓으면 $x=\dfrac{t-3}{2}$이므로

$$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2}$$

$$\therefore \int (2x+3)^5\, dx$$
$$=\int t^5\cdot\frac{1}{2}\,dt=\frac{1}{2}\int t^5 dt$$
$$=\frac{1}{12}t^6+C$$
$$=\frac{1}{12}(2x+3)^6+C$$

(2) $f(x)=3x,\ g'(x)=\sin x$로 놓으면

$f'(x)=3,\ g(x)=-\cos x$

이므로

$$\int 3x\sin x\, dx$$
$$=3x(-\cos x)-\int 3(-\cos x)dx$$
$$=-3x\cos x+3\int \cos x\, dx$$
$$=-3x\cos x+3\sin x+C$$

| 스스로 하기 |

1. 다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int (3x-4)^6 dx$

(2) $\int 2x\cos x\, dx$

〔풀이〕

(1) $3x-4=t$로 놓으면 $x=\dfrac{t+4}{3}$이므로

$$\frac{dx}{dt}=\square$$

$$\therefore \int (3x-4)^6\, dx$$
$$=\int t^6\cdot\frac{1}{3}dt=\frac{1}{3}\int t^6 dt$$
$$=\square\, t^7+C$$
$$=\square+C$$

(2) $f(x)=2x,\ g'(x)=\cos x$로 놓으면

$f'(x)=2,\ g(x)=\sin x$

이므로

$$\int 2x\cos x\, dx$$
$$=2x\sin x-\int 2\,\square\, dx$$
$$=2x\sin x-2\int \square\, dx$$
$$=2x\sin x+2\,\square+C$$

교과서 23, 27쪽

1 다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int \cos(3x-1)dx$　　(2) $\int \dfrac{\ln x}{x}dx$

(3) $\int 2x\ln x\, dx$　　(4) $\int 4xe^x dx$

개념 넓히기

부분적분법에서의 $f(x)$와 $g'(x)$

미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 부분적분법

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

를 이용할 때에는 어떤 것을 $f(x)$로 놓고 어떤 것을 $g'(x)$로 놓을 것인지 잘 판단해야 한다. 부분적분법을 적용해도 또 하나의 곱으로 표현된 부정적분이 나오기 때문에 이 방법을 사용하려면 부정적분 $\int f'(x)g(x)dx$가 계산하기 편해야 할 것이다.

다음과 같이 각 경우를 살펴보자.

(1) 다항함수와 삼각함수 $\sin x$, $\cos x$의 곱일 때

다항함수를 한 번 미분하면 차수가 1만큼 작아지고, 적분하면 차수가 1만큼 커진다. 삼각함수는 미분을 하든지 적분을 하든지 다시 삼각함수가 나온다.
따라서 다항함수를 $f(x)$, 삼각함수를 $g'(x)$로 놓고 부분적분법을 적용한다.

$f(x)$	$g'(x)$
다항함수	삼각함수

(2) 다항함수와 지수함수 e^x, a^x의 곱일 때

지수함수는 미분을 하든지 적분을 하든지 다시 지수함수가 나온다.
따라서 다항함수를 $f(x)$, 지수함수를 $g'(x)$로 놓고 부분적분법을 적용한다.

$f(x)$	$g'(x)$
다항함수	지수함수

(3) 다항함수와 로그함수 $\ln x$, $\log_a x$의 곱일 때

부분적분법을 공부하기 전에는 로그함수의 적분은 다루지 않았다.
즉, 로그함수의 부정적분이 다항함수의 부정적분보다 복잡하다고 볼 수 있으므로 로그함수를 $f(x)$, 다항함수를 $g'(x)$로 놓고 부분적분법을 적용한다.

$f(x)$	$g'(x)$
로그함수	다항함수

특히 $\ln x$의 부정적분을 구할 때, 이는 $\ln x$와 1의 곱의 꼴로 생각하고 부분적분법을 적용한다.
즉, $f(x) = \ln x$, $g'(x) = 1$로 놓고 부분적분법을 적용한다.

기본 익히기

*기본 실력을 확인하고 응용 능력을 기르기 위한 문제입니다.

1 다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{x(x+1)}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x+2}}\,dx$

(3) $\displaystyle\int 3x(3x-2)^5\,dx$　　(4) $\displaystyle\int 2xe^{-x^2}\,dx$

(5) $\displaystyle\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx$　　(6) $\displaystyle\int \frac{1+\ln x}{x}\,dx$

2 다음 부정적분을 구하여라.

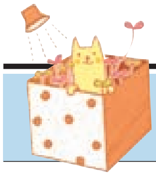
(1) $\displaystyle\int 8xe^{2x+1}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int (x+1)\sin x\,dx$　　(3) $\displaystyle\int 16x^3\ln x\,dx$

$1-\cos x=t$로 치환하여 부정적분을 구한다.

3 함수 $f(x)=\displaystyle\int (1-\cos x)^2\sin x\,dx$에 대하여 $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$일 때, $f(\pi)$의 값을 구하여라.

4 곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 $(x,\ y)$에서의 접선의 기울기가 $\dfrac{x-1}{x+1}$이고 $f(0)=2$일 때, $f(e-1)$의 값을 구하여라.

5 세린이는 $f(x)$를 적분하라는 문제를 잘못 보아 $f(x)$를 미분하여 xe^x-2x+1을 얻었다. $f(0)=1$일 때, $f(2)$의 값을 구하여라.



실력 키우기

*다양한 유형에 대한 활용 능력을 키워 실력을 향상시키는 문제입니다.

1 다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\displaystyle\int \sin^4 x \cos x\, dx$ (2) $\displaystyle\int \frac{1}{e^x+1}\, dx$

(3) $\displaystyle\int \frac{1+\sin x}{\cos x}\, dx$ (4) $\displaystyle\int \frac{2}{\cos x}\, dx$

2 다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\displaystyle\int 4x^2 e^{2x-1}\, dx$ (2) $\displaystyle\int (x^2+1)\sin x\, dx$ (3) $\displaystyle\int 2(\ln x)^2\, dx$

3 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

$$\{f(x)+g(x)\}'=(x^2+2x+2)e^x$$
$$\{f(x)g(x)\}'=(2x^3+3x^2+2)e^{2x}$$

이 성립하고 $f(0)=g(0)=1$, $f'(0)=2$일 때, $f(x)$, $g(x)$를 구하여라.

4 n이 자연수이고 $I_n=\displaystyle\int e^x x^n dx$라고 할 때, $I_n=e^x x^n-nI_{n-1}$이 성립함을 증명하여라.

5 $x>0$에서 정의된 함수 $f(x)$의 부정적분을 $F(x)$라고 할 때

$$F(x)=xf(x)-x^2\sin x,\ F\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$$

가 성립한다고 한다. 다음을 구하여라.

(1) $f'(x)$ (2) $f(x)$

개념 넓히기

부정적분 결과의 차이

부정적분 $\int \sin x \cos x\, dx$를 다음과 같이 여러 가지 방법으로 계산할 수 있다.

(i) $\sin x = t$로 놓고 양변을 t에 대하여 미분하면 $\cos x \dfrac{dx}{dt} = 1$이므로

$$\int \sin x \cos x\, dx = \int t\, dt = \frac{1}{2}t^2 + C_1 = \frac{1}{2}\sin^2 x + C_1$$

(ii) $\cos x = t$로 놓고 양변을 t에 대하여 미분하면 $-\sin x \dfrac{dx}{dt} = 1$이므로

$$\int \sin x \cos x\, dx = \int t \cdot (-1)\, dt = -\frac{1}{2}t^2 + C_2 = -\frac{1}{2}\cos^2 x + C_2$$

(iii) $2\sin x \cos x = \sin 2x$이므로

$$\int \sin x \cos x\, dx = \frac{1}{2}\int \sin 2x\, dx = -\frac{1}{4}\cos 2x + C_3$$

위의 (i), (ii), (iii)에서 같은 함수를 적분하였지만 그 방법에 따라 결과에 차이가 생긴다.

그렇다면 위의 세 가지 결과의 차이점은 무엇일까?

등식 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$을 이용하면 (ii)의 결과는

$$-\frac{1}{2}\cos^2 x + C_2 = -\frac{1}{2}(1 - \sin^2 x) + C_2 = \frac{1}{2}\sin^2 x - \frac{1}{2} + C_2$$

와 같이 쓸 수 있다.

또 등식 $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$를 이용하면 (iii)의 결과는

$$-\frac{1}{4}\cos 2x + C_3 = -\frac{1}{4}(1 - 2\sin^2 x) + C_3 = \frac{1}{2}\sin^2 x - \frac{1}{4} + C_3$$

과 같이 쓸 수 있다.

즉, (i), (ii), (iii)의 결과는 적분상수의 형태만 다르므로 서로 같은 결과라고 볼 수 있다.

부정적분을 구할 때, 그 결과의 형태가 다르다고 해서 틀린 것은 아니다. 적분하는 방법에 따라 그 결과가 다른 형태로 나올 수 있다.

2 정적분

학습 목표

- 구분구적법을 이용하여 간단한 도형의 넓이와 부피를 구할 수 있다.
- 정적분의 뜻을 알고, 여러 가지 함수의 정적분을 구할 수 있다.

1. 정적분의 뜻과 성질
2. 정적분의 치환적분법과 부분적분법

전력의 소비량 또는 인구의 증가량 등 여러 가지 현상을 나타내는 수학 모형으로써 지수함수, 로그함수, 삼각함수가 많이 쓰이며, 이러한 함수를 활용하여 실생활의 여러 가지 문제를 해결할 때, 정적분이 사용되기도 한다.

또 발굴된 유물의 연대 측정, 주식 가격의 분석, 의료 촬영기 등에서도 적분의 개념이 활용된다.

정적분에 들어가기 전에

1. 식의 값

문자를 포함한 식에서 문자를 어떤 수로 바꾸어 넣는 것을 문자에 수를 대입한다고 한다. 이때, 구한 값을 식의 값이라고 한다.

1 $x=1$일 때, x^3-2x^2+4x+1의 값을 구하여라.

2. 극한의 기본 성질

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 각각 α, β로 수렴할 때, 즉 $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n=\beta$일 때

① $\lim_{n\to\infty} ka_n=k\lim_{n\to\infty} a_n=k\alpha$ (단, k는 상수)

② $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty} a_n+\lim_{n\to\infty} b_n=\alpha+\beta$

③ $\lim_{n\to\infty} a_nb_n=\lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty} b_n=\alpha\beta$

④ $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}=\dfrac{\alpha}{\beta}$ (단, $b_n\neq0$, $\beta\neq0$)

2 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n^2+n+1}$

(2) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3+n}$

3. 절댓값 기호를 포함한 식

① $|x|=\begin{cases} x & (x\geq0) \\ -x & (x<0)\end{cases}$

② $y=|f(x)|$의 그래프는 $f(x)=0$을 기준으로 구간을 나누어 그린다.

(i) $f(x)\geq0$일 때, $y=f(x)$

(ii) $f(x)<0$일 때, $y=-f(x)$

3 다음 함수의 그래프를 그려라.

(1) $y=|x-1|$

(2) $y=|x^2+2x|$

4. 삼각함수 사이의 관계

① $\sin^2 x+\cos^2 x=1$

② $\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$

③ $1+\tan^2 x=\sec^2 x$

④ $1+\cot^2 x=\operatorname{cosec}^2 x$

4 θ가 제 1사분면의 각이고 $\cos\theta=\dfrac{3}{5}$일 때, $\sin\theta$, $\tan\theta$, $\cot\theta$, $\sec\theta$, $\operatorname{cosec}\theta$의 값을 구하여라.

1. 정적분의 뜻과 성질

* ☐ 안에 알맞은 것을 채워 가면서 교과서에서 학습한 내용을 확인해 보세요.

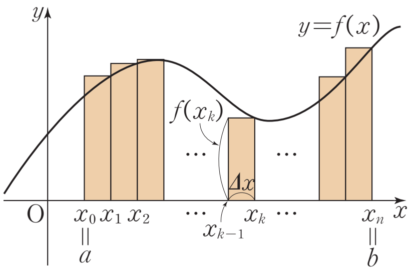
정적분의 뜻

함수 $f(x)$가 구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 다음을 함수 $f(x)$의 a에서 b까지의 정적분이라고 한다.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$$

$$\left(\text{단, } \Delta x = \frac{b-a}{n},\ x_k = a + k\Delta x\right)$$

여기서 a를 정적분의 아래끝, b를 (1) ☐이라고 한다.



정적분의 기본 정리

함수 $f(x)$가 구간 $[a, b]$에서 연속이고, $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라고 하면

$$\int_a^b f(x)dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - \boxed{(2)\quad}$$

| 참고 | 함수 $f(t)$가 구간 $[a, b]$에서 연속이고, $a \le x \le b$일 때

$$S(x) = \int_a^x f(t)dt \text{이면} \qquad S'(x) = f(x)$$

정적분의 성질

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 세 실수 a, b, c를 포함하는 구간에서 연속일 때

① $\int_a^a f(x)dx = \boxed{(3)\quad}$, $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

② $\int_a^b kf(x)dx = \boxed{(4)\quad}\int_a^b f(x)dx$ (단, k는 상수)

③ $\int_a^b \{f(x)+g(x)\}dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

④ $\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$

⑤ $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

⋯› 내용 정리가 부족한 학생은 **교과서 30~43쪽**을 공부하여 개념을 확실히 익히세요.

답 (1) 위끝 (2) $F(a)$ (3) 0 (4) k

바탕 다지기

*기초 개념을 확인하고 계산 능력을 기르기 위한 문제입니다.

| 함께 하기 |

1. 다음 정적분을 구하여라.

(1) $\displaystyle\int_1^2 (2x^3-3x^2+2x-4)\,dx$

(2) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{\sin^2 x}-\sin x\right)dx$

〔풀이〕

(1) $\displaystyle\int_1^2 (2x^3-3x^2+2x-4)\,dx$

$\displaystyle=\left[\frac{1}{2}x^4-x^3+x^2-4x\right]_1^2$

$\displaystyle=\left(\frac{1}{2}\cdot2^4-2^3+2^2-4\cdot2\right)-\left(\frac{1}{2}-1+1-4\right)$

$\displaystyle=-\frac{1}{2}$

(2) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{\sin^2 x}-\sin x\right)dx$

$\displaystyle=\Big[-\cot x+\cos x\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$

$\displaystyle=\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{2}\right)-\left(-\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$\displaystyle=\frac{1}{6}(3+\sqrt{3})$

| 스스로 하기 |

1. 다음 정적분을 구하여라.

(1) $\displaystyle\int_1^3 (2x^2-3x-2)\,dx$

(2) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx$

〔풀이〕

(1) $\displaystyle\int_1^3 (2x^2-3x-2)\,dx$

$\displaystyle=\left[\frac{2}{3}x^3-\square\, x^2-2x\right]_1^3$

$\displaystyle=\left(\frac{2}{3}\cdot3^3-\square\cdot3^2-2\cdot3\right)-\left(\frac{2}{3}-\square-2\right)$

$=\square$

(2) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx$

$\displaystyle=\left[\frac{1}{2}x-\square\,\sin 2x\right]_0^{2\pi}$

$=\square$

교과서 40, 42쪽

1 다음 정적분을 구하여라.

(1) $\displaystyle\int_{-3}^3 (x^2-2x+3)\,dx$

(2) $\displaystyle\int_1^3 (2y-1)\,dy$

(3) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{y}\,dy$

(4) $\displaystyle\int_1^4 \left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$

(5) $\displaystyle\int_0^{\pi} \pi\sin x\,dx$

(6) $\displaystyle\int_0^1 (e^x+x)\,dx$

(7) $\displaystyle\int_0^2 x(x-2)\,dx+\int_2^4 x(x-2)\,dx$

(8) $\displaystyle\int_1^2 (x^3-5x^2+7x+8)\,dx-\int_1^2 (x^3-2x^2+3x-2)\,dx$

개념 넓히기

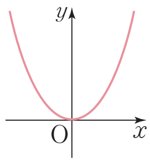
우함수와 기함수의 정적분

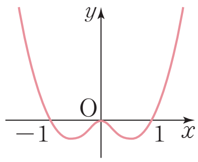
(1) 우함수와 기함수의 정의

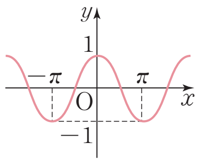
모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$일 때, $f(x)$를 우함수 또는 짝수함수라고 한다.

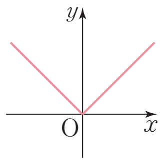
이때, $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다. 예를 들어 다음과 같은 함수는 우함수이다.

① $y=x^2$ ② $y=x^4-x^2$ ③ $y=\cos x$ ④ $y=|x|$





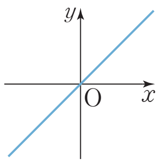


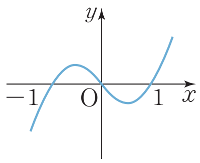


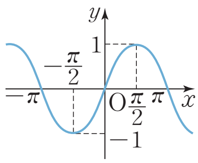
또 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$일 때, $f(x)$를 기함수 또는 홀수함수라고 한다.

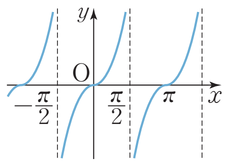
이때, $y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다. 예를 들어 다음과 같은 함수는 기함수이다.

① $y=x$ ② $y=x^3-x$ ③ $y=\sin x$ ④ $y=\tan x$









(2) 우함수와 기함수의 정적분

함수 $y=f(x)$가 구간 $[-a,\ a]$에서 연속일 때

(i) 함수 $f(x)$가 우함수이면 $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx=2\int_{0}^{a} f(x)dx$

(ii) 함수 $f(x)$가 기함수이면 $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx=0$

| **참고** | 우함수와 기함수의 정적분은 위끝과 아래끝의 절댓값이 같을 때 사용하면 편리하다.

확인학습 **1** 우함수와 기함수를 이용하여 정적분 $\displaystyle\int_{-2}^{2}(6x^5+2x^3+4x^2-1)dx$를 구하여라.

기 본 익 히 기

*기본 실력을 확인하고 응용 능력을 기르기 위한 문제입니다.

1 다음 정적분을 구하여라.

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2-2x-3}\,dx$

(2) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2 dx$

(3) $\displaystyle\int_0^{\ln 3} \frac{e^{3x}}{e^x-1}\,dx+\int_{\ln 3}^{0} \frac{1}{e^y-1}\,dy$

(4) $\displaystyle\int_{-1}^{2} (x^2-3x)\,dx+\int_4^3 x(3-x)\,dx-\int_3^2 x(x-3)\,dx$

(5) $\displaystyle\int_{-1}^{5} (2e^x+5)\,dx+\int_5^{-1} (e^x+4)\,dx-\int_2^5 (e^x+1)\,dx$

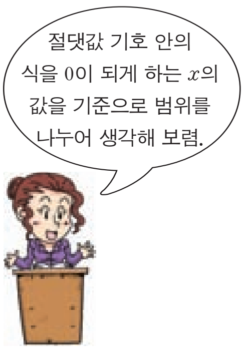
2 다음 함수를 x에 대하여 미분하여라.

(1) $\displaystyle\int_{-2}^{x} (3t^2-4t-5)\,dt$　　(2) $\displaystyle\int_2^x (t-2)(t+3)\,dt$

3 등식 $\displaystyle\int_1^2 (4x^3-ax+1)\,dx=0$을 만족하는 상수 a의 값을 구하여라.

4 함수 $f(x)=\begin{cases} -x^2+3x & (x\geq 1) \\ x^2+1 & (x\leq 1) \end{cases}$일 때, 다음 정적분을 구하여라.

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx$



5 다음 정적분을 구하여라.

(1) $\displaystyle\int_1^3 |x-2|\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_{-2}^{3} |x^2-x-2|\,dx$

(3) $\displaystyle\int_0^{\pi} |\cos x|\,dx$　　(4) $\displaystyle\int_{-1}^{1} |e^x-1|\,dx$

개념 넓히기

무한급수의 합과 정적분

정적분의 정의에 의하여 함수 $f(x)$가 구간 $[a,\ b]$에서 연속이면

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\varDelta x=\int_a^b f(x)dx\left(\text{단, } \varDelta x=\frac{b-a}{n},\ x_k=a+\frac{b-a}{n}k\right)$$

가 성립한다. 이를 이용하여 다음 극한값을 구하여 보자.

$$S=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)$$

1단계 무한급수의 합을 $\lim\limits_{n\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k)\varDelta x$의 꼴로 나타내기

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{n+n}$$
$$=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\frac{1}{1+\frac{3}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}$$

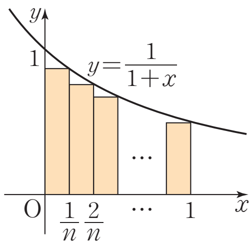
$f(x)=\dfrac{1}{1+x}$로 놓으면 $f\left(\dfrac{k}{n}\right)=\dfrac{1}{1+\frac{k}{n}}$이므로 구하는 극한값 S는

$$S=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}$$

2단계 무한급수의 합을 정적분으로 나타내기

$\varDelta x=\dfrac{1}{n},\ x_k=\dfrac{k}{n}$라고 하면 $a=0,\ b=1$이므로 정적분의 정의에 의하여

$$S=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\varDelta x=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx$$



3단계 정적분 계산하기

$$S=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\Big[\ln|1+x|\Big]_0^1=\ln 2$$

확인학습 **1** 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}\right)$ (2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{n+k}\right)$

실 력 키 우 기

*다양한 유형에 대한 활용 능력을 키워 실력을 향상시키는 문제입니다.

1 임의의 실수 x에 대하여 다음 등식을 만족하는 함수 $y=f(x)$와 양수 a의 값을 각각 구하여라.

(1) $\int_a^x f(t)dt=x^2-2x-3$

(2) $\int_a^x f(t+1)dt=x^3+x^2-x-a$

2 구분구적법을 이용하여 다음을 구하여라.

(1) 곡선 $y=x^3$과 x축 및 $x=a\,(a>0)$로 둘러싸인 도형의 넓이

(2) 반지름의 길이가 r인 반구의 부피

3 다음을 만족하는 함수 $f(x)$를 구하여라.

$$f(x)=\sin x-\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(t)\cos t\,dt$$

4 정적분 $\int_0^1 |e^x-e^a|\,dx$의 값을 $f(a)$라고 할 때, $f(a)$가 최소가 되게 하는 a의 값을 구하여라. (단, $0\le a\le 1$)

5 정적분을 이용하여 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{3k}{n}\right)^3\frac{2}{n}$

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)(1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3)}{(1+2+3+\cdots+n)(1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4)}$

(2) 분모, 분자를 n^7으로 나누어 정적분 4개로 고쳐 본다.

공학 도구

*수학적 개념을 공학 도구를 이용하여 이해하고 탐구해 보세요.

정적분을 이용한 원주율 계산

기하작도용 프로그램을 사용하여 반지름의 길이가 1인 원에 내접하는 정n각형의 넓이를 구하고 n의 값을 크게 하여 π의 근삿값을 구하여 보자.

1단계 계산식 아이콘( )을 선택한 후 화면을 클릭하면 [식 편집]이 열린다. 이름에 'E1'을 입력한 후 '슬라이더 보이기'에 체크하고 오른쪽 입력란 두 곳에 3과 999를 각각 입력하고 확인을 누른다.

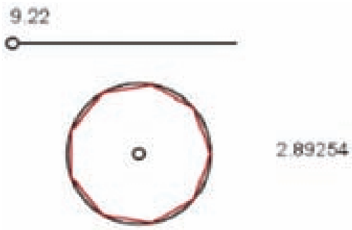
2단계 다시 한 번 화면을 클릭하면 새로운 [식 편집]이 열린다. 이때, 이름에 'n'을, 계산식에 'round(E1)'을 입력한 후 확인을 누른다.

3단계 반지름이 주어진 원 아이콘( )을 선택하고 화면을 클릭한 후 마우스 버튼을 누르지 않고 마우스를 이동하면 원이 그려진다. 이 상태에서 클릭을 하면 [원 편집]이 열린다. 반지름에 1을 입력하고 확인을 누른다.
마우스를 이 원의 중심에 가져다 놓고 오른쪽 버튼을 클릭하면 [점 편집]이 열린다. 이때, x, y좌표에 각각 0을 입력하고 확인을 누른다.

4단계 함수 아이콘( )을 클릭하면 [함수 또는 곡선]이 열린다. 이름, 부터, 까지, 간격, x좌표를 나타내는 식, y좌표를 나타내는 식 항목에 각각 'f', '0', '2*pi', '2*pi/n', 'rcos(x)', 'rsin(x)'를 입력하고 확인을 누른다.

5단계 계산식 아이콘( )을 선택한 후 화면을 클릭하면 [식 편집]이 열린다. 여기서 계산식에 'integrate(f)'를 입력하면 다각형의 넓이가 구해진다.

6단계 **1단계**에서 만든 슬라이더를 마우스 오른쪽 버튼으로 클릭한 후 오른쪽으로 이동하면서 n의 값을 크게 하면 π의 근삿값을 구할 수 있다.



2. 정적분의 치환적분법과 부분적분법

* $\boxed{}$ 안에 알맞은 것을 채워 가면서 교과서에서 학습한 내용을 확인해 보세요.

정적분의 치환적분법

구간 $[a,\ b]$에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 미분가능한 함수 $x=g(t)$의 도함수 $g'(t)$가 구간 $[\alpha,\ \beta]$에서 연속이고, $a=g(\alpha),\ b=g(\beta)$이면

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt$$

| 참고 | 무리함수의 치환적분은 치환하는 식에 따라 여러 가지 방법으로 할 수 있다.

예를 들어 정적분 $\int_1^2 3x\sqrt{x-1}\,dx$를 구하여 보자.

(i) $\sqrt{x-1}=t$로 놓으면 $\quad x=t^2+1,\ \dfrac{dx}{dt}=2t$

$x=1$일 때 $t=0$, $x=2$일 때 $t=1$이므로

$$\int_1^2 3x\sqrt{x-1}\,dx=3\int_0^1 (t^2+1)\cdot t\cdot 2t\,dt=6\int_0^1 (t^4+t^2)dt$$

$$=6\left[\frac{1}{5}t^5+\frac{1}{3}t^3\right]_0^1=\boxed{(1)}$$

(ii) $x-1=t$로 놓으면 $\quad x=t+1,\ \dfrac{dx}{dt}=1$

$x=1$일 때 $t=0$, $x=2$일 때 $t=1$이므로

$$\int_1^2 3x\sqrt{x-1}\,dx=3\int_0^1 (t+1)\sqrt{t}\,dt=3\int_0^1 (t^{\frac{3}{2}}+t^{\frac{1}{2}})dt$$

$$=3\left[\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\boxed{(2)}$$

정적분의 부분적분법

두 함수 $f(x),\ g(x)$가 미분가능하고, $f'(x),\ g'(x)$가 연속일 때

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx=\Big[f(x)g(x)\Big]_a^b-\int_a^b f'(x)g(x)dx$$

| 보기 | $\int_2^e \ln x\,dx$에서 $f(x)=\ln x,\ g'(x)=1$로 놓으면 $f'(x)=\dfrac{1}{x},\ g(x)=x$이므로

$$\int_2^e \ln x\,dx=\int_2^e 1\cdot\ln x\,dx=\Big[x\ln x\Big]_2^e-\int_2^e \boxed{(3)}\,dx$$

$$=e-2\ln 2-\Big[\boxed{(4)}\Big]_2^e=\boxed{(5)}$$

⋯▸ 내용 정리가 부족한 학생은 **교과서 44~49쪽**을 공부하여 개념을 확실히 익히세요.

답 (1) $\frac{16}{5}$ (2) $\frac{16}{5}$ (3) 1 (4) x (5) $2-2\ln 2$

바탕 다지기

*기초 개념을 확인하고 계산 능력을 기르기 위한 문제입니다.

| 함께 하기 |

1. 다음 정적분을 구하여라.

(1) $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{1-x}\,dx$

(2) $\displaystyle\int_0^{\ln 2} xe^x\,dx$

〔풀이〕

(1) $1-x=t$로 놓으면 $x=1-t$에서

$$\frac{dx}{dt}=-1$$

$x=0$일 때 $t=1$, $x=1$일 때 $t=0$이므로

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x}\,dx$$
$$=\int_1^0 (1-t)\cdot\sqrt{t}\cdot(-1)dt$$
$$=\int_0^1 (t^{\frac{1}{2}}-t^{\frac{3}{2}})dt$$
$$=\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}\right]_0^1$$
$$=\frac{4}{15}$$

(2) $f(x)=x$, $g'(x)=e^x$으로 놓으면

$f'(x)=1$, $g(x)=e^x$이므로

$$\int_0^{\ln 2} xe^x\,dx$$
$$=\Big[xe^x\Big]_0^{\ln 2}-\int_0^{\ln 2} e^x\,dx$$
$$=2\ln 2-\Big[e^x\Big]_0^{\ln 2}$$
$$=2\ln 2-1$$

| 스스로 하기 |

1. 다음 정적분을 구하여라.

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x\cos x\,dx$

(2) $\displaystyle\int_1^{e^2} x\ln x\,dx$

〔풀이〕

(1) $\sin x=t$로 놓으면 $\cos x\dfrac{dx}{dt}=1$

$x=0$일 때 $t=0$, $x=\dfrac{\pi}{4}$일 때 $t=\boxed{}$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x\cos x\,dx$$
$$=\int_0^{\boxed{}} t^2\,dt=\left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^{\boxed{}}$$
$$=\boxed{}$$

(2) $f(x)=\ln x$, $g'(x)=x$로 놓으면

$f'(x)=\dfrac{1}{x}$, $g(x)=\dfrac{1}{2}x^2$이므로

$$\int_1^{e^2} x\ln x\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}x^2\ln x\right]_1^{e^2}-\int_1^{e^2}\frac{1}{2}x^2\cdot\frac{1}{x}\,dx$$
$$=e^4-\int_1^{e^2}\frac{1}{2}x\,dx$$
$$=e^4-\left[\frac{1}{4}x^2\right]_1^{e^2}$$
$$=\boxed{}$$

교과서 46, 47, 48쪽

1 다음 정적분을 구하여라.

(1) $\displaystyle\int_0^1 e^{3x+2}\,dx$

(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1)\cos x\,dx$

(4) $\displaystyle\int_{2\pi}^{3\pi} x\sin x\,dx$

기본 익히기

*기본 실력을 확인하고 응용 능력을 기르기 위한 문제입니다.

1 연속함수 $f(x)$에 대하여

$$\int_0^2 f(x)dx=12$$

가 성립할 때, 정적분 $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(2x+1)dx$를 구하여라.

$2x+1=t$로 치환한다.

2 다음 정적분의 값을 구하여라.

(1) $\int_0^{\pi}(1-\cos^2 x)\sin x\,dx$ (2) $\int_e^{e^2}\frac{3(\ln x)^2}{x}dx$

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 x\,dx$ (4) $\int_0^1\frac{1}{e^x+1}dx$

3 다음 정적분의 값을 구하여라.

(1) $\int_0^1 x^2e^{-x}dx$ (2) $\int_1^e\frac{\ln x}{x^2}dx$ (3) $\int_{-1}^1 |x|e^x dx$

(3) 절댓값 기호 안의 식을 0으로 하는 값을 기준으로 구간을 나누어 적분한다.

4 자연수 n에 대하여 $I_n=\int_0^1 x^ne^x dx$라고 할 때, 다음 중 옳은 것을 골라라.

ㄱ. $I_1>I_2$
ㄴ. $n\geq 2$일 때, $nI_{n-1}+I_n=1$
ㄷ. $I_4=9e-24$

5 함수 $f(t)=\int_0^{t-1}(x-t)e^x dx$의 최댓값을 구하여라.

$f(t)$를 미분하여 극값을 구해 본다.

개 념　넓 히 기

정적분의 삼각치환법

삼각함수로 치환하여 적분하는 방법을 알아보자.

(1) 피적분함수가 $f(x)=\sqrt{a^2-x^2}$ 의 꼴인 경우

$x=a\sin\theta\left(-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$로 치환한다.

예를 들어 $\int_0^2\sqrt{2^2-x^2}\,dx$에서 $x=2\sin\theta\left(-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$로 치환하면

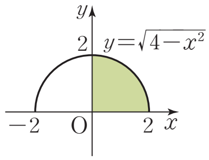
$$\sqrt{2^2-x^2}=\sqrt{2^2(1-\sin^2\theta)}=\sqrt{2^2\cos^2\theta}=2\cos\theta,\ \frac{dx}{d\theta}=2\cos\theta$$

$x=0$일 때 $\theta=0$, $x=2$일 때 $\theta=\frac{\pi}{2}$이므로

$$\int_0^2\sqrt{2^2-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}4\cos^2\theta\,d\theta=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta=\pi$$

| 참고 | $f(x)=\sqrt{2^2-x^2}$은 중심이 원점이고 반지름의 길이가 2인 원의 x축 윗부분이므로

$$\int_0^2\sqrt{2^2-x^2}\,dx=\pi$$



(2) 피적분함수가 $f(x)=\sqrt{a^2+x^2}$ $\left(\text{또는 } f(x)=\frac{1}{a^2+x^2}\right)$의 꼴인 경우

$x=a\tan\theta\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$로 치환한다.

예를 들어 $\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\,dx$에서 $x=\tan\theta\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$로 치환하면

$$1+x^2=1+\tan^2\theta=\sec^2\theta,\ \frac{dx}{d\theta}=\sec^2\theta$$

$x=0$일 때 $\theta=0$, $x=1$일 때 $\theta=\frac{\pi}{4}$이므로

$$\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\frac{\pi}{4}$$

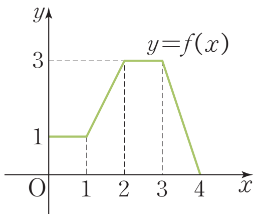
확 인 학 습　**1**　다음 정적분을 구하여라.

(1) $\int_{-1}^1\sqrt{1-x^2}\,dx$　　(2) $\int_0^1\frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx$

실 력 키 우 기

*다양한 유형에 대한 활용 능력을 키워 실력을 향상시키는 문제입니다.

1 $0\le x\le 4$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 정적분 $\int_0^1 f(2x+1)dx$를 구하여라.



2 다음 물음에 답하여라.

(1) $\int_0^a f(x)dx=\int_0^a f(a-x)dx$임을 보여라.

(2) 정적분 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$의 값을 구하여라.

3 다음 정적분을 구하여라.

(1) $\int_0^1 (1+x)\sqrt{1-x^2}dx$

(2) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$

4 자연수 n에 대하여 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$라고 할 때, 다음 물음에 답하여라.

주어진 I_n을 부분적분하여 I_n과 I_{n-2} 사이의 관계식을 구한다.

(1) $n\ge 3$일 때, I_n과 I_{n-2} 사이의 관계식을 구하여라.

(2) $I_5=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x\,dx$의 값을 구하여라.

(3) $I_6=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x\,dx$의 값을 구하여라.

5 정적분을 이용하여 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+k^2}$

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\{\sqrt{n^2-1^2}+2\sqrt{n^2-2^2}+\cdots+(n-1)\sqrt{n^2-(n-1)^2}\}$

3 정적분의 활용

학습 목표

- 도형의 넓이와 부피를 구할 수 있다.
- 속도와 거리에 대한 문제를 해결할 수 있다.

1. 도형의 넓이　　2. 도형의 부피　　3. 속도와 거리

아르키메데스(Archimedes ; B. C. 287～B. C. 212)는 서로 접한 원뿔, 구, 원기둥의 부피의 비가 1 : 2 : 3이 된다는 사실을 발견하였다.

또 카발리에리(Cavalieri, F. B. ; 1598～1647)는 경계면으로 둘러싸인 두 입체도형 V, V'을 하나의 정해진 평면과 평행한 평면으로 자를 때, V, V'의 내부에 있는 잘린 부분의 넓이의 비가 항상 $m : n$이면 입체도형 V, V'의 부피의 비도 $m : n$이 됨을 발견하였다.

아르키메데스와 카발리에리는 이러한 사실을 발견하는 데 많은 시간이 걸렸으나 정적분을 이용하면 이를 쉽게 확인할 수 있다.

정적분의 활용에 들어가기 전에

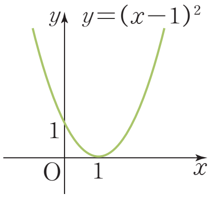
1. 두 함수의 그래프의 교점

① 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는 방정식 $f(x)=0$의 해와 같다.

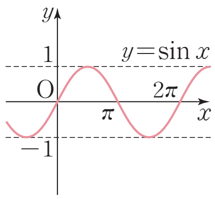
② 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표는 방정식 $f(x)=g(x)$의 해와 같다.

2. 여러 가지 함수의 그래프

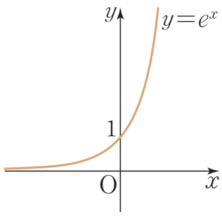
① $y=(x-1)^2$의 그래프



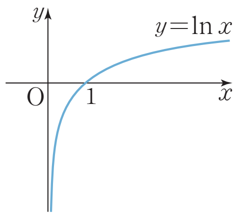
② $y=\sin x$의 그래프



③ $y=e^x$의 그래프



④ $y=\ln x$의 그래프



3. 기둥의 부피

밑넓이가 S, 높이가 h인 각기둥 또는 원기둥의 부피 V는

$$V=Sh$$

4. 속도와 가속도

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 좌표가 $x=f(t)$로 주어질 때

① 속도: $v(t)=\dfrac{dx}{dt}=f'(t)$

② 가속도: $a(t)=\dfrac{dv}{dt}=f''(t)$

1 다음 두 함수의 그래프의 교점의 x좌표를 각각 구하여라.

(1) $y=x^2$, $y=x+2$

(2) $y=x^2+2x$, $y=3$

(3) $\begin{cases} y=\sin x\ (0\le x\le 2\pi) \\ y=\dfrac{1}{2} \end{cases}$

2 다음 함수의 그래프를 그려라.

(1) $y=x^2-2x-3$

(2) $y=|2x-1|$

(3) $y=\sin 2x$

(4) $y=e^x-1$

3 정사각형의 한 변을 축으로 하여 정사각형을 회전시켰을 때 생기는 원기둥의 부피 V를 구하여라. (단, 정사각형의 한 변의 길이는 3 cm이다.)

4 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 좌표가

$$x=t^3-2t^2+5t-3$$

으로 주어질 때, 시각 $t=2$에서의 속도와 가속도를 각각 구하여라.

1. 도형의 넓이

* ☐ 안에 알맞은 것을 채워 가면서 교과서에서 학습한 내용을 확인해 보세요.

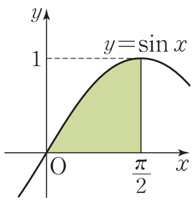
● 곡선과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이

함수 $y=f(x)$가 구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a,\ x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는

$$S=\int_a^b |f(x)|\,dx$$

| 보기 | $y=\sin x$와 x축 및 직선 $x=\frac{\pi}{2}$로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx=\boxed{(1)}$$



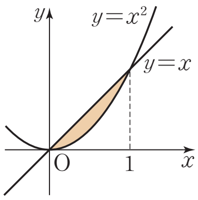
● 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이

구간 $[a,\ b]$에서 연속인 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 및 두 직선 $x=a,\ x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는

$$S=\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx$$

| 보기 | 직선 $y=x$와 곡선 $y=x^2$으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_0^1 (x-x^2)\,dx=\boxed{(2)}$$



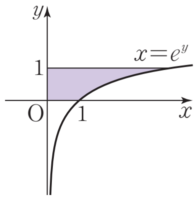
● 곡선과 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이

함수 $x=g(y)$가 y축의 구간 $[c,\ d]$에서 연속일 때, 곡선 $x=g(y)$와 y축 및 두 직선 $y=c$, $y=d$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는

$$S=\int_c^d |g(y)|\,dy$$

| 보기 | 곡선 $x=e^y$와 y축 및 두 직선 $y=0,\ y=1$로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_0^1 e^y\,dy=\boxed{(3)}$$



···› 내용 정리가 부족한 학생은 **교과서 52~57쪽**을 공부하여 개념을 확실히 익히세요.

답 (1) 1 (2) $\frac{1}{6}$ (3) $e-1$

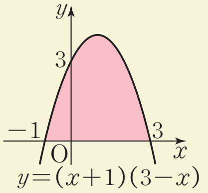
바탕 다지기

*기초 개념을 확인하고 계산 능력을 기르기 위한 문제입니다.

| 함께 하기 |

1. 곡선 $y=(x+1)(3-x)$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이 S를 구하여라.

[풀이]



주어진 곡선과 x축의 교점의 x좌표는

$(x+1)(3-x)=0$

에서

$x=-1,\ x=3$

구간 $[-1,\ 3]$에서 $y\geq 0$이므로 구하는 넓이 S는

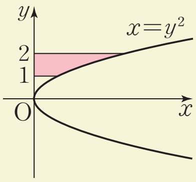
$$S=\int_{-1}^{3}(x+1)(3-x)dx$$

$$=\int_{-1}^{3}(-x^2+2x+3)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2+3x\right]_{-1}^{3}=\frac{32}{3}$$

2. 곡선 $x=y^2$과 y축 및 두 직선 $y=1,\ y=2$로 둘러싸인 도형의 넓이 S를 구하여라.

[풀이]



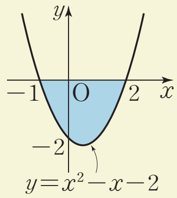
$x=y^2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 구간 $[1,\ 2]$에서 $x\geq 0$이므로 구하는 넓이 S는

$$S=\int_{1}^{2}y^2dy=\left[\frac{1}{3}y^3\right]_{1}^{2}=\frac{7}{3}$$

| 스스로 하기 |

1. 곡선 $y=x^2-x-2$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이 S를 구하여라.

[풀이]



주어진 곡선과 x축의 교점의 x좌표는

$x^2-x-2=0$에서

$x=-1,\ x=2$

구간 $[-1,2]$에서 $y\leq 0$이므로 구하는 넓이 S는

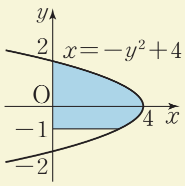
$$S=\int_{-1}^{\square}(-x^2+x+2)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{-1}^{\square}$$

$$=\square$$

2. 곡선 $x=-y^2+4$와 y축 및 두 직선 $y=-1,\ y=2$로 둘러싸인 도형의 넓이 S를 구하여라.

[풀이]



$x=-y^2+4$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 구간 $[-1,\ 2]$에서 $x\geq 0$이므로 구하는 넓이 S는

$$S=\int_{-1}^{\square}(-y^2+4)dy$$

$$=\left[-\frac{1}{3}y^3+4y\right]_{-1}^{\square}=\square$$

교과서 54, 57쪽

1 다음 곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

(1) $y=\sqrt{x},\ x$축, $x=4$　　　(2) $x=y^2-4y+3,\ y$축

교과서 57쪽

2 곡선 $y=e^x$과 y축 및 직선 $y=e$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

기본 익히기

*기본 실력을 확인하고 응용 능력을 기르기 위한 문제입니다.

1 다음 곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

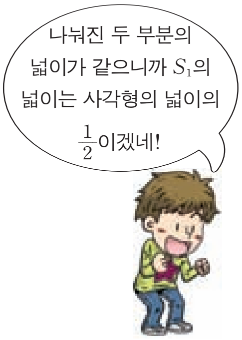
(1) $y=x(x+2)(x-1)$, x축

(2) $x=y^2-2y$, $y=1$, $y=3$, y축

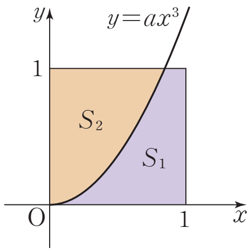
2 다음 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

(1) $y=x^2-4x+5$, $y=-x^2+6x-3$

(2) $y=\sin x$, $y=\sin 2x$ $(0\le x\le \pi)$



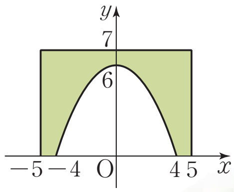
3 오른쪽 그림과 같이 네 직선 $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=1$로 둘러싸인 정사각형을 곡선 $y=ax^3$이 두 부분 S_1, S_2로 나눌 때, S_1과 S_2의 넓이가 같아지도록 상수 a의 값을 정하여라.

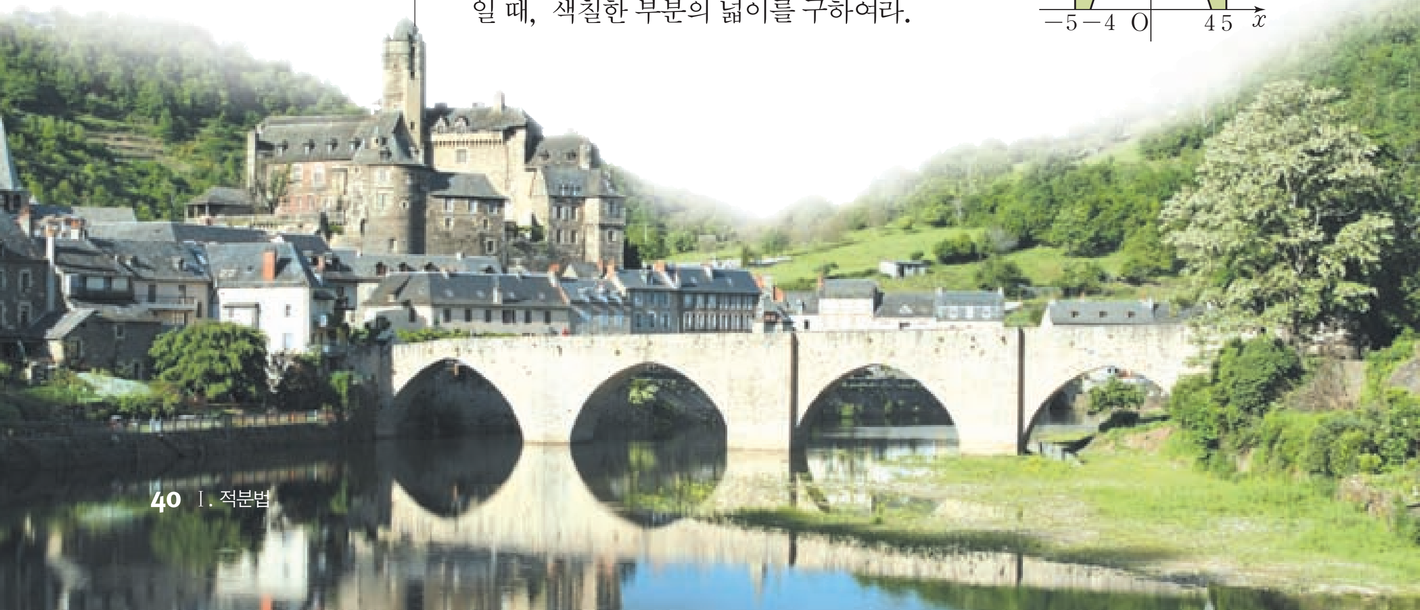


$y=\sqrt{x}$ 위의 점 $(1,\ 1)$에서의 접선의 방정식을 먼저 구한다.

4 곡선 $y=\sqrt{x}$와 이 곡선 위의 점 $(1,\ 1)$에서 그은 접선 및 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

5 오른쪽 그림과 같이 아치의 모양이 포물선인 다리가 있다. 아치의 높이가 6 m, 폭이 8 m일 때, 색칠한 부분의 넓이를 구하여라.





개념 넓히기

정적분의 계산에서 자주 사용하는 공식

(1) 이차방정식 $(x-\alpha)(x-\beta)=0$의 두 근 α, β를 이용한 정적분

$$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

| 참고 | $x-\alpha=t$로 놓으면 $x=t+\alpha$, $\dfrac{dx}{dt}=1$

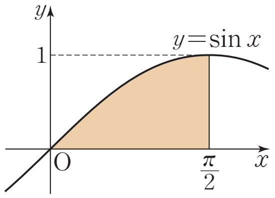
$x=\alpha$일 때 $t=0$, $x=\beta$일 때 $t=\beta-\alpha$이므로

$$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx=\int_{0}^{\beta-\alpha}t(t+\alpha-\beta)dt$$

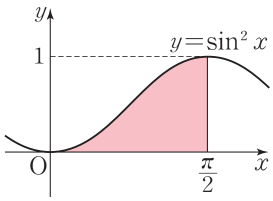
$$=\left[\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}(\alpha-\beta)t^2\right]_0^{\beta-\alpha}=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

(2) 삼각함수의 정적분

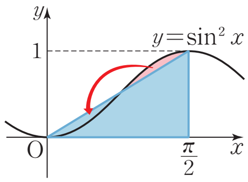
① $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=1$



② $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,dx=\frac{\pi}{4}$



| 참고 | $y=\sin^2 x$의 그래프와 x축 및 직선 $x=\dfrac{\pi}{2}$로 둘러싸인 도형의 넓이는 오른쪽 그림과 같이 가로의 길이가 $\dfrac{\pi}{2}$, 세로의 길이가 1인 직각삼각형의 넓이와 같다.

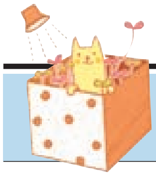


③ 자연수 n에 대하여 $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx=I_n$ 으로 놓으면

$$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}\ (n\geq 3)$$

확인학습

1 이차방정식 $x^2-2x-1=0$의 두 근을 α, β $(\alpha<\beta)$라고 할 때, 정적분 $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}(x^2-2x-1)dx$의 값을 구하여라.



실력 키우기

*다양한 유형에 대한 활용 능력을 키워 실력을 향상시키는 문제입니다.

두 부분의 넓이가 같아지려면 전체의 정적분의 값은 어떻게 될까?

1 $0<a<1$에서 곡선 $y=x(x-a)(x-1)$과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S(a)$라고 할 때, 다음 물음에 답하여라.

(1) $S(a)$를 a에 대한 식으로 나타내어라.

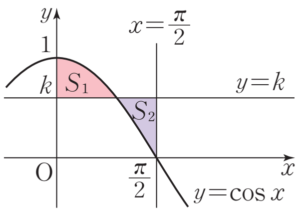
(2) 주어진 도형의 x축 윗부분과 아랫부분의 넓이가 같아지도록 a의 값을 정하여라.

2 곡선 $y=\ln x$와 원점에서 이 곡선에 그은 접선 및 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

두 곡선 $y=k\cos x$, $y=\sin x$를 그려서 교점을 α로 놓고 문제를 해결한다.

3 곡선 $y=k\cos x\left(0\leq x\leq\frac{\pi}{2}\right)$와 x축, y축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 곡선 $y=\sin x$에 의하여 이등분될 때, 양수 k의 값을 구하여라.

4 오른쪽 그림과 같이 구간 $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$에서 곡선 $y=\cos x$와 y축 및 두 직선 $y=k$, $x=\frac{\pi}{2}$로 둘러싸인 두 부분 S_1, S_2의 넓이의 합이 최소가 되도록 하는 k의 값을 구하여라.

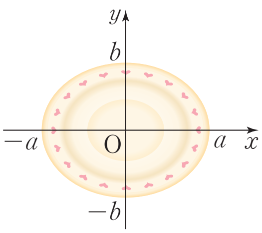


5 오른쪽 그림과 같은 접시가 있다. 이 접시의 외곽선이 그리는 곡선의 방정식이

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$$

일 때, 접시의 면적을 구하여라.

(단, 주어진 접시의 겉면은 평평하다.)



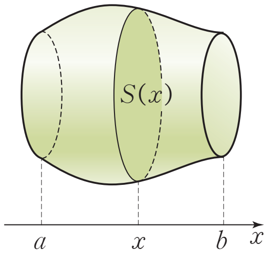
2. 도형의 부피

* ☐ 안에 알맞은 것을 채워 가면서 교과서에서 학습한 내용을 확인해 보세요.

입체도형의 부피

구간 $[a,\ b]$의 임의의 점 x에서 x축에 수직인 평면으로 입체도형을 자른 단면의 넓이가 $S(x)$일 때, 입체도형의 부피 V는

$$V=\int_a^b S(x)dx$$



x축을 중심으로 회전시킬 때 생기는 회전체의 부피

함수 $y=f(x)$가 구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a,\ x=b$로 둘러싸인 도형을 x축을 중심으로 회전시킬 때 생기는 회전체의 부피 V는

$$V=\pi\int_a^b y^2dx=\pi\int_a^b\{\boxed{(1)\quad}\}^2dx$$

y축을 중심으로 회전시킬 때 생기는 회전체의 부피

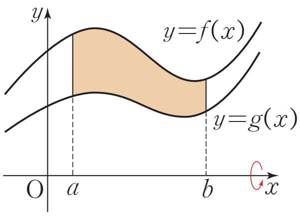
함수 $x=g(y)$가 구간 $[c,\ d]$에서 연속일 때, 곡선 $x=g(y)$와 y축 및 두 직선 $y=c,\ y=d$로 둘러싸인 도형을 y축을 중심으로 회전시킬 때 생기는 회전체의 부피 V는

$$V=\pi\int_c^d x^2dy=\pi\int_c^d\{\boxed{(2)\quad}\}^2dy$$

두 곡선으로 둘러싸인 도형의 회전체의 부피

두 함수 $f(x),\ g(x)$가 구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 $f(x)\geq g(x)\geq 0$일 때, 두 곡선 $y=f(x),\ y=g(x)$와 두 직선 $x=a,\ x=b$로 둘러싸인 도형을 x축을 중심으로 회전시킬 때 생기는 회전체의 부피 V는

$$V=\pi\int_a^b\{f(x)\}^2dx-\pi\int_a^b\{\boxed{(3)\quad}\}^2dx$$



…› 내용 정리가 부족한 학생은 **교과서 59~64쪽**을 공부하여 개념을 확실히 익히세요.

답 (1) $f(x)$ (2) $g(y)$ (3) $g(x)$

바탕 다지기

*기초 개념을 확인하고 계산 능력을 기르기 위한 문제입니다.

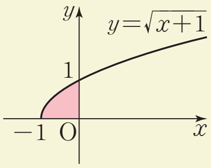
| 함께 하기 |

1. 곡선 $y=\sqrt{x+1}$과 x축, y축으로 둘러싸인 도형을 다음에 주어진 축을 중심으로 회전시킬 때 생기는 회전체의 부피를 각각 구하여라.

(1) x축 (2) y축

[풀이]

주어진 도형을 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



(1) 구하는 회전체의 부피 V_x는

$$V_x=\pi\int_{-1}^{0}y^2dx=\pi\int_{-1}^{0}(\sqrt{x+1})^2dx$$
$$=\pi\int_{-1}^{0}(x+1)dx$$
$$=\pi\left[\frac{1}{2}x^2+x\right]_{-1}^{0}=\frac{\pi}{2}$$

(2) $y=\sqrt{x+1}$에서 $x=y^2-1$이므로 구하는 회전체의 부피 V_y는

$$V_y=\pi\int_{0}^{1}x^2dy=\pi\int_{0}^{1}(y^2-1)^2dy$$
$$=\pi\int_{0}^{1}(y^4-2y^2+1)dy$$
$$=\pi\left[\frac{1}{5}y^5-\frac{2}{3}y^3+y\right]_{0}^{1}=\frac{8}{15}\pi$$

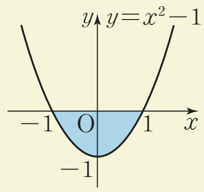
| 스스로 하기 |

1. 곡선 $y=x^2-1$과 x축으로 둘러싸인 도형을 다음에 주어진 축을 중심으로 회전시킬 때 생기는 회전체의 부피를 각각 구하여라.

(1) x축 (2) y축

[풀이]

주어진 도형을 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



(1) 구하는 회전체의 부피 V_x는

$$V_x=\pi\int_{-1}^{1}y^2dx=\pi\int_{-1}^{1}(x^2-1)^2\,dx$$
$$=\pi\int_{-1}^{1}(x^4-2x^2+1)dx$$
$$=\pi\left[\boxed{}\right]_{-1}^{1}=\boxed{}$$

(2) $y=x^2-1$에서 $x^2=y+1$이므로 회전체의 부피 V_y는

$$V_y=\pi\int_{-1}^{0}x^2dy$$
$$=\pi\int_{-1}^{0}(y+1)dy$$
$$=\pi\left[\boxed{}\right]_{-1}^{0}=\boxed{}$$

교과서 63쪽

1 다음 곡선 또는 직선으로 둘러싸인 도형을 x축을 중심으로 회전시킬 때 생기는 회전체의 부피를 구하여라.

(1) $y=x+1$, x축, $x=2$, $x=5$

(2) $y=x^3+1$, x축, $x=1$, $x=2$

교과서 63쪽

2 곡선 $y=\sqrt{x}$와 y축 및 두 직선 $y=1$, $y=2$로 둘러싸인 도형을 y축을 중심으로 회전시킬 때 생기는 회전체의 부피를 구하여라.

기본 익히기

*기본 실력을 확인하고 응용 능력을 기르기 위한 문제입니다.

1 곡선 $y=|x^2-1|$과 직선 $y=3$으로 둘러싸인 도형을 다음에 주어진 축을 중심으로 회전시킬 때 생기는 회전체의 부피를 각각 구하여라.

(1) x축　　　　(2) y축

2 다음 곡선 또는 직선으로 둘러싸인 도형을 [　] 안에 주어진 축을 중심으로 회전시킬 때 생기는 회전체의 부피를 구하여라.

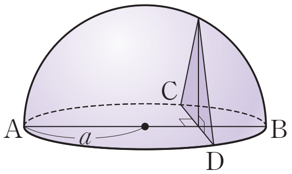
(1) $y=\cos x,\ y=-\dfrac{2}{\pi}x+1\ \left(0\le x\le \dfrac{\pi}{2}\right)$ [x축]

(2) $y=1-\sqrt{x},\ x=0,\ y=0$ [y축]

(3) $y=e^x,\ y=e^{-x},\ x=-1,\ x=1$ [x축]

선분 AB를 x축, 선분 AB의 중점을 원점으로 잡고, 두 점 A, B를 좌표로 나타낸다.

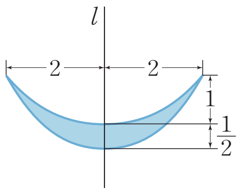
3 반지름의 길이가 a인 원의 중심을 지나는 선분 AB에 수직인 현 CD가 있다. 현 CD를 한 변으로 하는 정삼각형이 선분 AB와 수직인 상태로 점 A에서 점 B까지 움직일 때 생기는 입체도형의 부피를 구하여라.



두 그래프의 교점의 x좌표와 y좌표를 구하여 적분하는 구간을 정한다.

4 곡선 $y=\sqrt{x}$와 직선 $y=mx\ (m>0)$로 둘러싸인 도형을 x축, y축을 중심으로 각각 회전시킬 때 생기는 회전체의 부피가 같아지도록 상수 m의 값을 정하여라.

5 어느 사진기의 렌즈의 모양은 오른쪽 그림과 같이 두 포물선으로 둘러싸인 도형을 직선 l을 중심으로 회전시킬 때 생기는 회전체와 같다. 이 렌즈의 부피를 구하여라.



카발리에리의 원리

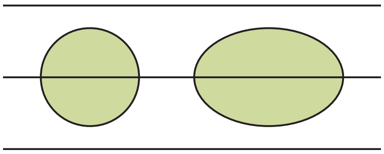
카발리에리(Cavalieri, F. B. ; 1598~1647)

카발리에리는 이탈리아 예수아티(Jesuati)의 수도사이자 수학자였다. 처음에는 종교 교육을 받았으나 갈릴레이의 제자 카스텔리(Benedetto Castelli)를 통해 수학을 알게 된 뒤 밀라노와 파르마 등의 수도원에서 신학을 가르치며 수학을 연구했다. 1626년에 갈릴레이의 도움으로 볼로냐 대학의 교수가 된 그는 생을 마칠 때까지 후학을 양성하는 데 힘썼다.

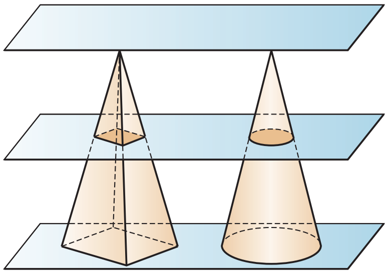
카발리에리는 17세기의 미분적분학 형성에 공헌하였는데 그의 면적 계산법은 아르키메데스의 엄밀한 '착출법(method of exhaustion)'과 달리 '무한히 얇게 자르며 비교하는' 직관적인 원리에 바탕을 두었다.

카발리에리의 원리는 다음과 같다.

1. 두 평면도형이 한 쌍의 평행선 사이에 끼여 있고 이 평행선들과 평행한 임의의 선으로 두 평면도형을 잘랐을 때 생기는 두 선분의 길이가 항상 일정한 비를 이루면, 두 평면도형의 넓이 또한 그 비를 이룬다.



2. 두 입체도형이 한 쌍의 평행한 평면 사이에 끼여 있고 이 평면들과 평행한 임의의 평면으로 두 입체도형을 잘랐을 때 생기는 두 단면의 넓이가 항상 일정한 비를 이루면, 두 입체도형의 부피 또한 그 비를 이룬다.



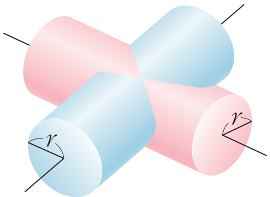
카발리에리의 원리는 타원의 넓이와 회전체의 부피를 쉽게 구할 수 있는 편리한 방법이다. 당시에 엄밀한 증명은 이루어지지 않았으나 근대의 '구분구적법'과 비슷한 것이다. 17세기에 뉴턴이나 라이프니츠의 미분적분학이 꽃을 피우기 전에 많은 결실을 맺은 이론으로 의미가 깊다.

실생활 문제 해결하기

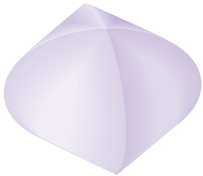
*수학적 개념을 실생활 문제에 적용해 보는 문제입니다.

수직으로 만나는 두 원기둥의 공통 부분의 부피

| 문제 | 다음 | **그림 1** | 과 같이 밑면의 반지름의 길이가 r인 두 원기둥의 중심축이 수직으로 만날 때 생기는 도형은 | **그림 2** | 와 같다. | **그림 2** | 의 도형의 부피를 구하여 보자.



| **그림 1** |



| **그림 2** |

1단계_ 문제를 이해하여 보자.

(1) 주어진 조건을 모두 찾아라.

(2) 두 원기둥의 중심축과 평행한 평면으로 | **그림 2** | 의 도형을 잘랐을 때 그 단면의 모양을 말하여라.

2단계_ 계획을 세워 보자.

(1) 두 원기둥의 중심축과 평행하고 t만큼 떨어진 단면의 한 변의 길이를 구하여라.

(2) t의 범위를 구하여라.

3단계_ 문제를 풀어 보자.

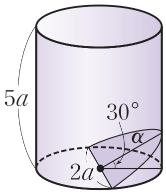
(1) 단면의 넓이 $S(t)$를 구하여라.

(2) | **그림 2** | 의 도형의 부피를 구하여라.

실력 키우기

*다양한 유형에 대한 활용 능력을 키워 실력을 향상시키는 문제입니다.

1 밑면의 지름의 길이가 $2a$, 높이가 $5a$인 원기둥이 있다. 이 원기둥을 밑면의 지름을 지나고 밑면에 대하여 30°의 각을 이루는 평면 α로 잘랐을 때, 밑면과 평면 α 사이에 놓여 있는 입체도형의 부피를 구하여라.

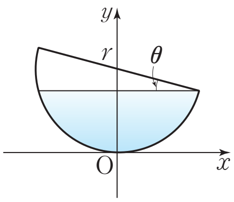


2 곡선 $y=x+\sin x$ $(0\le x\le 2\pi)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형을 x축을 중심으로 회전시킬 때 생기는 회전체의 부피 V를 구하여라.

3 곡선 $y=e^x$과 원점에서 이 곡선에 그은 접선 및 y축으로 둘러싸인 도형을 y축을 중심으로 회전시킬 때 생기는 회전체의 부피를 구하여라.

4 $\dfrac{\pi}{4}\le x\le\dfrac{5}{4}\pi$에서 두 곡선 $y=\sin x$, $y=\cos x$로 둘러싸인 도형을 x축을 중심으로 회전시킬 때 생기는 회전체의 부피를 구하여라.

5 반지름의 길이가 r인 반구 모양의 그릇에 물을 가득 채운 후 오른쪽 그림과 같이 θ만큼 기울여 놓아 물을 흘렸다. 남은 물의 부피를 V라 하고, 다음 물음에 답하여라.



(1) V를 θ에 대한 식으로 나타내어라.

(2) $\theta=30^\circ$일 때, 흘러 나온 물의 양과 남은 물의 양의 비를 구하여라.

3. 속도와 거리

* $\boxed{}$ 안에 알맞은 것을 채워 가면서 교과서에서 학습한 내용을 확인해 보세요.

수직선 위에서의 운동

수직선 위를 움직이는 물체의 속도가 $v(t)$이고 시각 $t=a$에서의 위치가 x_0이면

① 시각 t에서의 물체의 위치: $x(t)=x_0+\int_a^t v(t)dt$

② 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 물체의 위치의 변화량: $\int_a^b \boxed{\text{(1)}\qquad} dt$

③ 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 물체가 움직인 거리: $\int_a^b |v(t)|dt$

평면 위에서의 운동

평면 위를 움직이는 물체의 시각 t에서의 좌표 $(x,\ y)$가 $x=f(t),\ y=g(t)$라고 하면 물체가 $t=a$에서 $t=b$까지 움직인 거리 s는

$$s=\int_a^b \sqrt{\{f'(t)\}^2+\{\boxed{\text{(2)}\qquad}\}^2}\,dt$$

곡선의 길이

① 매개변수로 나타낸 곡선 $x=f(t),\ y=g(t)$의 겹치는 부분이 없을 때, 곡선의 $t=a$에서 $t=b$까지의 길이 l은

$$l=\int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$
$$=\int_a^b \sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}\,dt$$

② 곡선 $y=f(x)$의 $x=a$에서 $x=b$까지의 길이 l은

$$l=\int_a^b \sqrt{\boxed{\text{(3)}\qquad}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$
$$=\int_a^b \sqrt{\boxed{\text{(4)}\qquad}+\{f'(x)\}^2}\,dx$$

⋯› 내용 정리가 부족한 학생은 **교과서 65~72쪽**을 공부하여 개념을 확실히 익히세요.

답 (1) $v(t)$ (2) $g'(t)$ (3) 1 (4) 1

바탕 다지기

*기초 개념을 확인하고 계산 능력을 기르기 위한 문제입니다.

| 함께 하기 |

1. x축 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도 $v(t)=-t^2+4t-3$일 때, 다음을 구하여라.

(1) 시각 $t=0$에서 $t=4$까지의 위치의 변화량

(2) 시각 $t=0$에서 $t=4$까지 움직인 거리

[풀이]

(1) $t=0$에서 $t=4$까지의 위치의 변화량은

$$\int_0^4(-t^2+4t-3)dt$$

$$=\left[-\frac{1}{3}t^3+2t^2-3t\right]_0^4=-\frac{4}{3}$$

(2) $t=0$에서 $t=4$까지 움직인 거리는

$$\int_0^4|-t^2+4t-3|dt$$

$$=-\int_0^1(-t^2+4t-3)dt$$

$$+\int_1^3(-t^2+4t-3)dt$$

$$-\int_3^4(-t^2+4t-3)dt$$

$$=4$$

| 스스로 하기 |

1. x축 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도 $v(t)=6t^2-18t+12$일 때, 다음을 구하여라.

(1) 시각 $t=0$에서 $t=3$까지의 위치의 변화량

(2) 시각 $t=0$에서 $t=3$까지 움직인 거리

[풀이]

(1) $t=0$에서 $t=3$까지의 위치의 변화량은

$$\int_0^3(6t^2-18t+12)dt$$

$$=\left[\boxed{\qquad\qquad}\right]_0^3=\boxed{\quad}$$

(2) $t=0$에서 $t=3$까지 움직인 거리는

$$\int_0^3|6t^2-18t+12|dt$$

$$=\int_0^1(6t^2-18t+12)dt$$

$$\boxed{\quad}\int_1^2(6t^2-18t+12)dt$$

$$+\int_2^3(6t^2-18t+12)dt$$

$$=\boxed{\quad}$$

교과서 67, 68쪽

1 수직선 위를 움직이는 점 P의 원점을 출발한 후 시각 t에서의 속도 $v(t)=-t^2+4t$일 때, 다음을 구하여라.

(1) 시각 t에서의 점 P의 위치 $x(t)$

(2) $t=3$일 때의 점 P의 위치 $x(3)$

교과서 70쪽

2 평면 위를 움직이는 점 P$(x,\ y)$가 시각 t에서 $x=e^t\cos t,\ y=e^t\sin t$일 때, 시각 $t=0$에서 $t=1$까지 점 P가 움직인 거리를 구하여라.

기본 익히기

*기본 실력을 확인하고 응용 능력을 기르기 위한 문제입니다.

오류 피하기
$v(0)=55$임에 주의한다.

최고점에 도달하였을 때
$$v(t)=0$$
이다.

1 지면으로부터 높이가 55 m인 곳에서 똑바로 위로 던진 물체의 시각 t초 후의 속도를 $v(t)$ m/s라고 하면 $v(t)=50-10t$일 때, 다음을 구하여라.

(1) 6초 후의 지면으로부터 물체까지의 높이

(2) 최고점에 도달하였을 때의 지면으로부터의 높이

(3) 지면에 떨어지는 순간의 속도

(4) 던진 후 2초부터 8초까지 움직인 거리

2 직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도 $v(t)=(1-|t-1|)^3$이고, 시각 $t=0$일 때의 점 P의 위치가 2일 때, 시각 $t=1$과 $t=1.5$에서의 점 P의 위치를 각각 구하여라.

3 평면 위를 움직이는 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$의 시각 t에서의 위치가 다음과 같을 때, 점 P가 움직인 거리를 각각 구하여라.

(1) $x=2t^3,\ y=3t^2\ (0\le t\le\sqrt{3})$

(2) $x=\cos(2t^2+1),\ y=\sin(2t^2+1)\ (0\le t\le 2)$

4 평면 위를 움직이는 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$의 시각 t에서의 속도가 $\left(\dfrac{\cos t}{t^2+1},\ \dfrac{\sin t}{t^2+1}\right)$일 때, 점 P의 시각 $t=0$에서 $t=\sqrt{3}$까지 움직인 거리를 구하여라.

5 직선 궤도를 매초 30 m의 속도로 달리는 열차가 있다. 브레이크를 걸고 t초 후의 속도를 $v(t)$ m/s라고 하면 $v(t)=30-\dfrac{3}{2}t$일 때, 브레이크를 건 후 완전히 정지할 때까지 걸린 시간과 달린 거리를 구하여라.

실 력 키 우 기

*다양한 유형에 대한 활용 능력을 키워 실력을 향상시키는 문제입니다.

(1) $v(t)=0$이 되는 t의 값을 기준으로 $v(t)\geq 0$일 때와 $v(t)\leq 0$일 때로 나눈다.

1 x축 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도 $v(t)=e-e^{2-\frac{t}{2}}$일 때, 다음을 구하여라. (단, $t=0$일 때의 점 P의 좌표는 -2이다.)

(1) 시각 $t=0$에서 $t=4$까지 움직인 거리

(2) 시각 $t=4$일 때의 좌표

2 원점을 동시에 출발하여 x축 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t에서의 속도 $v_1(t)$, $v_2(t)$는 각각

$$v_1(t)=1-2t,\ v_2(t)=3t^2-1$$

이라고 한다. P, Q의 중점을 R라고 할 때, 점 R가 다시 원점을 지날 때까지 걸리는 시간을 구하여라.

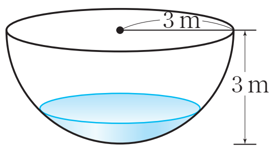
수면의 넓이를 S, 수면의 반지름의 길이를 r라고 하면 수면의 넓이의 증가 속도는

$$\frac{dS}{dt}$$

수면의 반지름의 길이의 증가 속도는

$$\frac{dr}{dt}$$

3 오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 3 m인 반구 모양의 비어 있는 용기에 수면이 매분 1 m로 상승하도록 유지하면서 물을 넣으려고 한다. 물을 넣기 시작한 지 t분이 되었을 때, 다음을 t의 함수로 나타내어라. (단, $0<t<3$)



(1) 넣은 물의 양 V

(2) 수면의 넓이의 증가 속도 v

(3) 수면의 반지름의 길이의 증가 속도 w

4 다음을 구하여라.

(1) 곡선 $x=\cos t$, $y=\sin t$의 $t=0$에서 $t=1$까지의 길이

(2) 곡선 $y=\ln(1-x^2)$의 $x=0$에서 $x=\frac{1}{2}$까지의 길이

5 활주로를 20초 동안 달린 후 이륙하는 비행기가 있다. 이 비행기가 달리기 시작한 후 t초일 때의 가속도 $a(t)=\sqrt[3]{t}\ \mathrm{m/s^2}$일 때, 비행기가 달리기 시작하여 8초 동안 움직인 거리를 구하여라. (단, $0\leq t\leq 20$)

프 로 젝 트

*수학적 개념을 보다 깊이 있게 탐구하고 적용해 보는 문제입니다.

도넛(doughnut)의 부피

준비물 도넛, 칼

다음과 같이 도넛의 부피를 구하여 보자.

❶ 동그란 도넛을 준비한다.

❷ 지면과 수직으로 도넛을 잘게 자르고, 자른 단면의 넓이를 구한다.

❸ 자른 도넛을 일렬로 쌓고, 그 높이를 측정한다.

자른 도넛의 단면의 넓이가 S이고, 일렬로 쌓은 높이가 l이면 쌓은 모양이 원기둥이므로 도넛의 부피 V는

$$V=Sl$$

임을 알 수 있다.

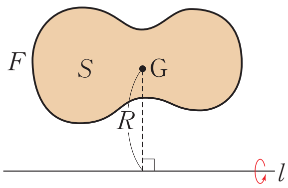
서기 300년 경 수학자 파포스(Pappos ; ? 290∼? 350)는 위와 같이 도넛을 한없이 잘게 잘라서 쌓은 입체도형은 밑넓이가 S이고 높이가 l인 원기둥에 가까워진다고 예측하였다.

또 1640년 수학자 굴딘(Guldin, P. ; 1577∼1643)은 이와 관련한 다음의 정리를 발표하였다.

직선 l의 한쪽에 놓인 도형 F의 무게중심을 G라고 하자. 이 도형의 넓이가 S이고, 점 G에서 직선 l까지의 거리가 R이면 도형 F를 직선 l을 중심으로 회전시킬 때 생기는 회전체의 부피 V는

$$V=(2\pi R)S$$

와 같이 구할 수 있다.



논술/수행 평가 과제

원 $x^2+(y-3)^2=4$를 x축을 중심으로 회전시킬 때 생기는 회전체의 부피를 다음의 방법으로 각각 구하여 보고 두 결과를 비교하여 보자.

1. 정적분을 이용하는 방법

2. 굴딘의 정리를 이용하는 방법

I 대단원 확인하기

계산

1 ★

함수 $f(x)=-x^2+4x$에 대하여 $\int_2^4 f(x)dx-\int_3^4 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx$의 값을 구하여라.

이해

2 ★★

연속함수 $y=f(x)$에 대하여 $xf(x)=\frac{2}{3}x^3+\int_0^x f(t)dt$가 성립하고 $f(0)=0$일 때, $f(2)$의 값을 구하여라.

이해

3 ★★

함수 $f(x)$에 대하여

$$\int_0^1 f(x)dx=1,\ \int_0^1 xf(x)dx=2$$

가 성립할 때, 정적분 $\int_0^1 (x-k)^2 f(x)dx$의 값이 최소가 되도록 실수 k의 값을 정하여라.

창의성

4 ★★

다음 극한값을 구하여라.

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\sin\frac{\pi}{n}\right)^3+\left(\sin\frac{2}{n}\pi\right)^3+\left(\sin\frac{3}{n}\pi\right)^3+\cdots+\left(\sin\frac{n}{n}\pi\right)^3\right\}\frac{\pi}{n}$$

계산

5 ★★

다음 곡선 또는 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

(1) $y=x^3-2x^2,\ y=x-2$　　(2) $y=x^3-x,\ y=x^2-1$

창의성

6 ★★

함수 $f(x)=x^3-x^2+x$의 역함수를 $g(x)$라고 할 때, 두 곡선 $y=f(x),\ y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

이해

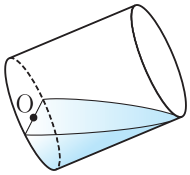
7
★★

곡선 $\ln x+\ln y=1$과 두 직선 $y=ex$, $y=\frac{1}{e}x$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

문제 해결

8
★★★

물이 가득히 채워져 있는 원기둥을 가만히 기울여 놓아 물을 흘렸더니 오른쪽 그림과 같은 원기둥의 밑면의 중심 O에 수면이 나타날 때 물이 멈추었다. 남아 있는 물의 양과 처음 물의 양의 비를 구하여라.



계산

9
★

다음 곡선 또는 직선으로 둘러싸인 도형을 [ ] 안에 주어진 축을 중심으로 회전시킬 때 생기는 회전체의 부피를 구하여라.

(1) $y=\sin x+\cos x$, y축, $x=2\pi$ [x축]

(2) $y=\sqrt{x}$, y축, $y=1$ [y축]

계산

10
★★

곡선 $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$의 $t=0$에서 $t=\frac{\pi}{2}$까지의 길이를 구하여라.

의사소통

11
★★

초속 30 m로 선로를 달리는 열차가 브레이크를 걸었다. 이때, t초 후의 속도 $v(t)$는

$$v(t)=2-t+\frac{28}{t+1}$$

이라고 한다. 브레이크를 건 후 완전히 정지할 때까지 달린 거리를 구하여라.

Ⅱ 순열과 조합

체스 대결에서 1990년대부터는 컴퓨터가 사람의 실력을 뛰어넘기 시작하였다.

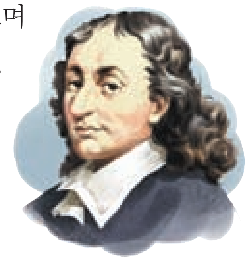
그러나 바둑 대결에서는 아직도 컴퓨터가 사람을 능가하지 못한다.

바둑에서 일어날 수 있는 경우의 수가 너무 많아서 모든 경우를 프로그램화할 수 없기 때문이다.

컴퓨터로는 계산이 어려운 순열과 조합의 문제를 사람들은 간단한 수식으로 표현할 수 있다.

생각하는 갈대 파스칼

_Pascal, B. ; 1623~1662



파스칼은 어릴 때부터 수학에 놀라운 재능을 보였으며 16세에 당대의 유명한 수학자 데자르그(Desargues, G. ; 1591～1661)의 영향을 받아 원뿔곡선에 관한 파스칼의 정리를 발견하였다. 또 18세에는 세무원인 아버지를 돕기 위하여 계산기를 고안하였는데 이로 인해 컴퓨터 창시자의 한 사람으로 불리기도 한다.

한편 1654년에는 페르마(Fermat, P. ; 1601～1665)와의 편지 교환으로 '내기에서의 분배 문제'를 다루어 확률론의 기초 확립에도 공헌하였다.

이항계수의 배열에서 이항계수와 조합의 관계를 보여주는 '파스칼의 삼각형'에서는 파스칼의 창의성을 엿볼 수 있다.

인간의 본질을 끊임없이 추구하였던 파스칼은 "사람은 생각하는 갈대이다." 라는 유명한 말을 남겼다.

1 순열, 조합과 이항정리

학습 목표

- 중복순열, 원순열, 같은 것이 있는 순열의 수를 구할 수 있다.
- 중복조합의 수를 구할 수 있다.
- 이항정리를 이용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있다.

1. 중복순열과 원순열 2. 중복조합 3. 이항정리

다항식 $(a+b)^n$을 전개하면 각 항의 계수 사이에서 규칙을 찾을 수 있다. 이러한 규칙성을 나타낸 것으로 널리 알려진 것이 파스칼(Pascal, B. ; 1623~1662)의 삼각형이다.

이에 앞서 동양에서는 송나라 시대에 가헌(賈憲 ; 1010~1070)이라는 사람에 의해 같은 규칙이 발견되었다. 가헌이 발견한 규칙은 주세걸(朱世傑 ; 1270~1330)이 쓴 '사원옥감(四元玉鑑)'이라는 책에 실려 있다.

아래의 **그림1** 은 사원옥감에 실려 있는 가헌의 삼각형이고, **그림2** 는 파스칼의 삼각형에서 홀수가 쓰여진 칸을 색칠하여 만든 시어핀스키(Sierpinski)의 삼각형이다.

그림1

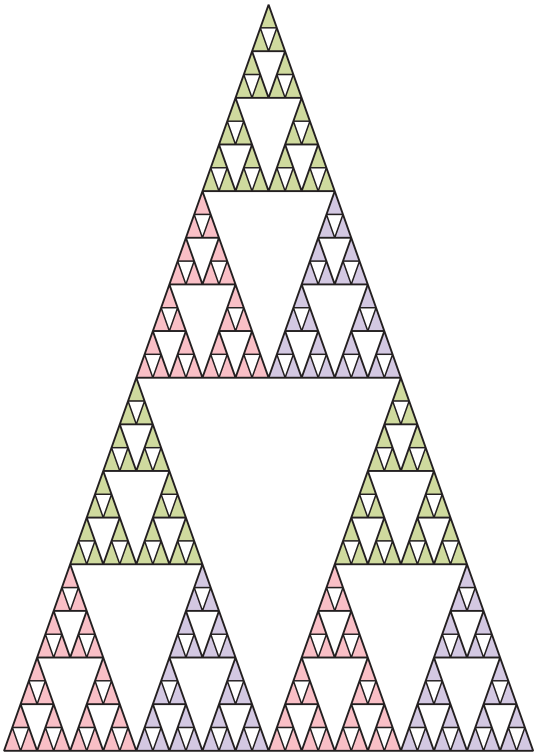


그림2

순열, 조합과 이항정리에 들어가기 전에

1. 합의 법칙

두 사건 A, B가 일어나는 경우의 수가 각각 m, n이고, A, B가 동시에 일어나지 않을 때, A 또는 B가 일어나는 경우의 수는 $m+n$이다.

1 어느 식당의 점심 메뉴로 한식이 4종류, 양식이 5종류 준비되어 있다. 점심 메뉴 한 종류를 택하는 경우의 수를 구하여라.

2. 곱의 법칙

사건 A가 일어나는 경우의 수가 m이고, 그 각각에 대하여 사건 B가 일어나는 경우의 수가 n일 때, A, B가 함께 일어나는 경우의 수는 $m\times n$이다.

2 60의 양의 약수의 개수를 구하여라.

3. 순열

① 서로 다른 n개에서 r개를 택하여 순서대로 배열하는 것을 n개에서 r개를 택하는 순열이라 하고, 이 순열의 수를 기호로 ${}_{n}\mathrm{P}_{r}$와 같이 나타낸다.

② $${}_{n}\mathrm{P}_{r}=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)=\frac{n!}{(n-r)!}\quad (\text{단, } 0\le r\le n)$$

③ ${}_{n}\mathrm{P}_{n}=n!=n(n-1)(n-2)\cdots3\cdot2\cdot1$

④ $0!=1$, ${}_{n}\mathrm{P}_{0}=1$

3 남학생 3명, 여학생 3명을 일렬로 세우려고 한다. 다음 경우의 수를 구하여라.

(1) 여학생 3명이 서로 이웃하는 경우

(2) 남학생이 양 끝에 서는 경우

4. 조합

① 서로 다른 n개에서 순서를 생각하지 않고 r개를 택하는 것을 n개에서 r개를 택하는 조합이라 하고, 이 조합의 수를 기호로 ${}_{n}\mathrm{C}_{r}$와 같이 나타낸다.

② $${}_{n}\mathrm{C}_{r}=\frac{{}_{n}\mathrm{P}_{r}}{r!}=\frac{n!}{r!(n-r)!}\quad (\text{단, } 0\le r\le n)$$

③ ${}_{n}\mathrm{C}_{0}=1$, ${}_{n}\mathrm{C}_{n}=1$

④ ${}_{n}\mathrm{C}_{r}={}_{n}\mathrm{C}_{n-r}$

4 9명을 다음과 같이 세 모둠으로 나누는 경우의 수를 구하여라.

(1) 4명, 3명, 2명

(2) 6명, 2명, 1명

1. 중복순열과 원순열

* ☐ 안에 알맞은 것을 채워 가면서 교과서에서 학습한 내용을 확인해 보세요.

● 중복순열

① 서로 다른 n개에서 중복을 허용하여 r개를 택하는 순열을 중복순열이라 하고, 그 수를 기호로 ${}_n\Pi_r$와 같이 나타낸다.

② ${}_n\Pi_r=n^r$

| **보기** | 두 개의 숫자 1, 2로 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는 서로 다른 2개에서 3개를 택하는 중복순열이므로

$${}_2\Pi_3=\boxed{(1)}\text{(개)}$$

● 원순열

① 서로 다른 n개를 원형으로 배열하는 순열을 원순열이라고 한다.

② 서로 다른 n개를 원형으로 배열하는 원순열의 수는

$$(n-1)!$$

| **보기** | 7명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$$(7-1)!=6!=\boxed{(2)}\text{(가지)}$$

● 같은 것이 있는 순열

n개 중에서 서로 같은 것이 각각 p개, q개, r개, $\cdots$일 때, n개를 모두 일렬로 배열하는 순열의 수는

$$\frac{n!}{p!q!r!\cdots}\ (\text{단, } p+q+r+\cdots=n)$$

| **보기** | 6개의 숫자 카드 1, 2, 2, 3, 3, 3으로 만들 수 있는 여섯 자리 자연수의 개수는 1개의 1, 2개의 2, 3개의 3을 일렬로 배열하는 순열이므로

$$\frac{\boxed{(3)}}{1!2!3!}=\boxed{(4)}\text{(개)}$$

⋯› 내용 정리가 부족한 학생은 **교과서 78~82쪽**을 공부하여 개념을 확실히 익히세요.

답 (1) 8 (2) 720 (3) 6! (4) 60

바탕 다지기

*기초 개념을 확인하고 계산 능력을 기르기 위한 문제입니다.

| 함께 하기 |

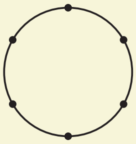
1. 두 개의 숫자 1, 2로 만들 수 있는 네 자리 자연수의 개수를 구하여라.

[풀이]

서로 다른 2개에서 4개를 택하는 중복순열이므로

$${}_2\Pi_4=2^4=16(\text{개})$$

2. 오른쪽 그림과 같이 원둘레를 6등분한 점에 여섯 개의 문자 a, b, c, d, e, f를 모두 써넣는 경우의 수를 구하여라.



[풀이]

서로 다른 6개를 원형으로 배열하는 원순열이므로

$$(6-1)!=5!=120(\text{가지})$$

3. hawaii를 구성하고 있는 문자를 일렬로 배열할 때, 서로 다른 경우의 수를 구하여라.

[풀이]

2개의 a, 2개의 i, 1개의 h, 1개의 w를 일렬로 배열하는 순열이므로

$$\frac{6!}{2!2!1!1!}=180(\text{가지})$$

| 스스로 하기 |

1. 두 개의 기호 '•', '—'를 다섯 번 사용하여 만들 수 있는 신호의 개수를 구하여라.

[풀이]

서로 다른 2개에서 $\square$개를 택하는 중복순열이므로

$${}_2\Pi_{\square}=\square(\text{개})$$

2. 오른쪽 그림과 같이 원을 5등분한 칸에 5가지의 색 빨강, 주황, 노랑, 초록, 파랑을 모두 칠하여 구분하는 경우의 수를 구하여라.

[풀이]

서로 다른 5가지 색을 원형으로 칠하는 원순열이므로

$$(5-\square)!=\square(\text{가지})$$

3. gangwon을 구성하고 있는 문자를 일렬로 배열할 때, 서로 다른 경우의 수를 구하여라.

[풀이]

2개의 g, 2개의 n, 1개의 a, 1개의 w, 1개의 o를 일렬로 배열하는 순열이므로

$$\frac{7!}{\square!\square!1!1!1!}=\square(\text{가지})$$

교과서 79쪽

1 중복을 허용하여 다섯 개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5로 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수를 구하여라.

교과서 82쪽

2 sense를 구성하고 있는 문자를 일렬로 배열할 때, 서로 다른 경우의 수를 구하여라.

기본 익히기

*기본 실력을 확인하고 응용 능력을 기르기 위한 문제입니다.

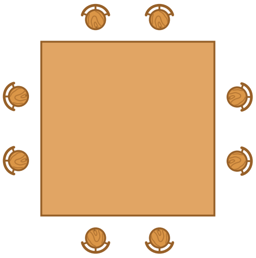
오류 피하기
맨 앞자리에 0이 오는 경우 두 자리 자연수가 된다.

1 다음의 각 경우에 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수를 구하여라.

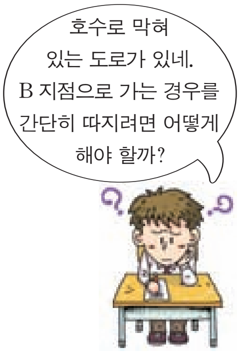
(1) 중복을 허용하여 다섯 개의 숫자 1, 3, 5, 7, 9를 사용하는 경우

(2) 중복을 허용하여 다섯 개의 숫자 0, 1, 3, 5, 7을 사용하는 경우

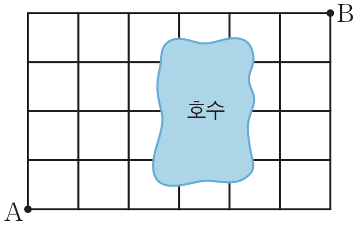
2 오른쪽 그림과 같은 정사각형 모양의 식탁에 네 쌍의 부부가 둘러앉을 때, 부부끼리는 한 변에 이웃하여 앉는 경우의 수를 구하여라.

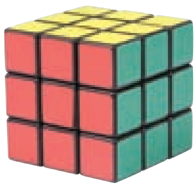


3 여섯 개의 숫자 0, 1, 1, 2, 2, 2로 만들 수 있는 여섯 자리 자연수의 개수를 구하여라.

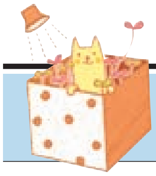


4 오른쪽 그림과 같은 도로의 A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수를 구하여라.





5 정육면체의 각 면을 여섯 가지 색으로 서로 다르게 칠하는 경우의 수를 구하여라.



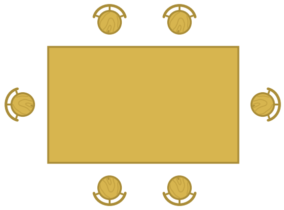
실력 키우기

*다양한 유형에 대한 활용 능력을 키워 실력을 향상시키는 문제입니다.

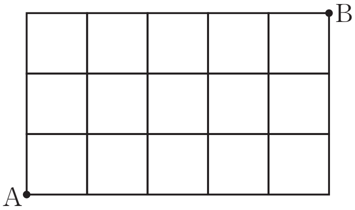
맨 앞자리에는 반드시 1이 와야 한다.

1 이진법으로 나타낸 수 중에서 $10001_{(2)}$, $11100_{(2)}$ 등과 같이 다섯 자리인 수의 개수를 구하여라.

2 오른쪽 그림과 같이 직사각형 모양의 6인용 식탁이 있다. 여섯 명이 식탁에 앉는 경우의 수를 구하여라.

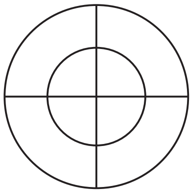


3 오른쪽 그림과 같이 각 구획이 정사각형 모양으로 이루어진 도로가 있다. 갑은 A 지점을 출발하여 B 지점으로 가고, 을은 B 지점을 출발하여 A 지점으로 갈 때, 각각 최단 거리를 택한다. 갑과 을의 속력이 서로 같고 동시에 각 지점을 출발할 때, 중도에 만난 후 각 지점에 도착하는 경우의 수를 구하여라.



갑과 을의 속력이 같으므로 갑, 을은 각각 같은 거리를 와서 만난다.

4 오른쪽 그림과 같은 원판에 서로 다른 8가지의 색을 모두 사용하여 8개의 각 영역을 칠하는 경우의 수를 구하여라. (단, 두 원의 중심은 같고 두 선분은 원의 중심에서 수직으로 만난다.)



f가 함수이려면 집합 A의 원소에 집합 B의 원소가 오직 하나씩 대응해야 한다.

5 두 집합 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$에 대하여 함수 f는 $f: A \longrightarrow B$일 때, f를 만드는 경우의 수를 구하여라.

2. 중복조합

* □ 안에 알맞은 것을 채워 가면서 교과서에서 학습한 내용을 확인해 보세요.

● 중복조합의 뜻

서로 다른 n개에서 중복을 허용하여 r개를 택하는 조합을 중복조합이라 하고, 그 수를 기호로 ${}_{n}\mathrm{H}_{r}$와 같이 나타낸다.

| 보기 | (1) 서로 다른 3개에서 5개를 택하는 중복조합의 수는 ${}_{3}\mathrm{H}_{\boxed{(1)}}$이다.

(2) 다섯 개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5에서 3개를 택하는 중복조합의 수는 ${}_{5}\mathrm{H}_{\boxed{(2)}}$이다.

● 중복조합의 수

중복조합의 수는 ${}_{n}\mathrm{H}_{r}={}_{n+r-1}\mathrm{C}_{r}$이다.

| 보기 | ${}_{4}\mathrm{H}_{3}={}_{4+\boxed{(3)}-1}\mathrm{C}_{3}={}_{6}\mathrm{C}_{3}=\boxed{(4)}$

개념 넓히기 ${}_{n}\mathrm{H}_{r}={}_{n+r-1}\mathrm{C}_{r}$

n개의 수 1, 2, 3, …, n 중에서 r개의 수를 택하는 중복조합을 수의 크기의 순서로 정리하면		왼쪽의 각 조합의 첫 번째 수에 0, 두 번째 수에 1, 세 번째 수에 2, …, r번째 수에 $r-1$을 각각 더하면
1, 1, 1, …, 1	→	1, 2, 3, …, r
1, 1, 1, …, 2	→	1, 2, 3, …, $r+1$
⋮		⋮
2, 2, 2, …, 2	→	2, 3, 4, …, $r+1$
⋮		⋮
n, n, n, …, $n-1$	→	n, $n+1$, $n+2$, …, $n+r-2$
n, n, n, …, n	→	n, $n+1$, $n+2$, …, $n+r-1$

여기서 왼쪽의 조합 전체의 집합과 오른쪽의 조합 전체의 집합은 일대일 대응이므로 그 원소의 개수는 서로 같다. 그런데 오른쪽 조합은 서로 다른 $(n+r-1)$개의 수에서 r개의 수를 택하는 조합이므로 그 조합의 수는 ${}_{n+r-1}\mathrm{C}_{r}$이다. 즉, ${}_{n}\mathrm{H}_{r}={}_{n+r-1}\mathrm{C}_{r}$이다.

⋯› 내용 정리가 부족한 학생은 **교과서 83~86쪽**을 공부하여 개념을 확실히 익히세요.

답 (1) 5 (2) 3 (3) 3 (4) 20

개념 넓히기

${}_{n}\mathrm{P}_{r}$, ${}_{n}\Pi_{r}$, ${}_{n}\mathrm{C}_{r}$, ${}_{n}\mathrm{H}_{r}$의 비교

네 개의 숫자 1, 2, 3, 4에서 두 개를 택하는 순열, 중복순열, 조합, 중복조합을 각각 나타내고, 그 개수를 구하여 보자.

(i) 서로 다른 네 개에서 두 개를 택하여 일렬로 배열하는 경우

순열: 12, 21, 13, 31, 14, 41, 23, 32, 24, 42, 34, 43

순열의 수: ${}_{4}\mathrm{P}_{2}=4\times3=12$(개)

(ii) 서로 다른 네 개에서 중복을 허용하여 두 개를 택해 일렬로 배열하는 경우

중복순열: 11, 12, 21, 13, 31, 14, 41, 22, 23, 32, 24, 42, 33, 34, 43, 44

중복순열의 수: ${}_{4}\Pi_{2}=4^2=16$(개)

(iii) 서로 다른 네 개에서 두 개를 택하는 경우

조합: $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$, $\{2, 3\}$, $\{2, 4\}$, $\{3, 4\}$

조합의 수: ${}_{4}\mathrm{C}_{2}=\dfrac{{}_{4}\mathrm{P}_{2}}{2!}=6$(개)

(iv) 서로 다른 네 개에서 중복을 허용하여 두 개를 택하는 경우

중복조합: $\{1, 1\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$, $\{2, 2\}$, $\{2, 3\}$, $\{2, 4\}$, $\{3, 3\}$, $\{3, 4\}$, $\{4, 4\}$

중복조합의 수: ${}_{4}\mathrm{H}_{2}={}_{4+2-1}\mathrm{C}_{2}={}_{5}\mathrm{C}_{2}=10$(개)

일반적으로 서로 다른 n개에서 r개를 택하는 순열, 중복순열, 조합, 중복조합의 특징을 정리하면 다음과 같다.

❶ ${}_{n}\mathrm{P}_{r}$: 중복을 허용하지 않고 순서를 생각한다.
❷ ${}_{n}\Pi_{r}$: 중복을 허용하고 순서를 생각한다.
❸ ${}_{n}\mathrm{C}_{r}$: 중복을 허용하지 않고 순서를 생각하지 않는다.
❹ ${}_{n}\mathrm{H}_{r}$: 중복을 허용하고 순서를 생각하지 않는다.

바탕 다지기

*기초 개념을 확인하고 계산 능력을 기르기 위한 문제입니다.

| 함께하기 |

1. 다음 중복조합의 수를 구하여라.

(1) ${}_5H_3$　　(2) ${}_5H_7$

〔풀이〕

${}_nH_r={}_{n+r-1}C_r$에서

(1) $n=5,\ r=3$이므로

$${}_5H_3={}_{5+3-1}C_3={}_7C_3=35$$

(2) $n=5,\ r=7$이므로

$${}_5H_7={}_{5+7-1}C_7={}_{11}C_7={}_{11}C_4=330$$

2. 농구공, 축구공, 배구공의 세 종류의 공에서 7개를 택하는 경우의 수를 구하여라.

〔풀이〕

서로 다른 3개에서 7개를 택하는 중복조합이므로

$${}_3H_7={}_{3+7-1}C_7={}_9C_7={}_9C_2=36\text{(가지)}$$

| 스스로 하기 |

1. 다음 중복조합의 수를 구하여라.

(1) ${}_4H_2$　　(2) ${}_3H_5$

〔풀이〕

${}_nH_r={}_{n+r-1}C_r$에서

(1) $n=4,\ r=2$이므로

$${}_4H_2={}_{4+\square-1}C_2={}_{\square}C_2=\boxed{}$$

(2) $n=3,\ r=5$이므로

$${}_3H_5={}_{3+\square-1}C_5={}_{\square}C_5={}_{\square}C_2=\boxed{}$$

2. 빨간색, 파란색, 노란색의 세 종류의 구슬에서 9개를 택하는 경우의 수를 구하여라.

〔풀이〕

서로 다른 3개에서 $\boxed{}$개를 택하는 중복조합이므로

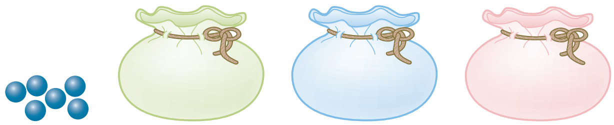
$${}_3H_{\square}={}_{3+\square-1}C_9={}_{\square}C_2=\boxed{}\text{(가지)}$$

교과서 85쪽

1 다항식 $(a+b+c)^5$을 전개할 때 생기는 항의 개수를 구하여라.

교과서 85쪽

2 파란색 구슬 6개를 서로 다른 세 주머니에 넣는 경우의 수를 구하여라.



기본 익히기

*기본 실력을 확인하고 응용 능력을 기르기 위한 문제입니다.

1 다음을 만족하는 n 또는 r의 값을 구하여라.

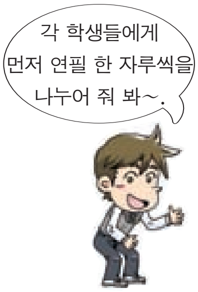
(1) ${}_{n}\mathrm{H}_{4}=15$　　　　(2) ${}_{8}\mathrm{H}_{r}=120$

2 다음 식을 전개할 때 생기는 항의 개수를 구하여라.

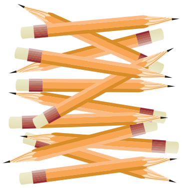
(1) $(a+b+c)^{7}$　　　　(2) $(a+b+c+d)^{7}$

x, y, z를 9번 택하는 중복조합의 수로 생각할 수 있다.

3 방정식 $x+y+z=9$를 만족하는 x, y, z의 음이 아닌 정수해의 개수를 구하여라.



4 똑같은 연필 12자루를 네 명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수를 구하여라.
(단, 모든 학생은 적어도 한 자루의 연필을 받는다.)



무기명 투표는 이름을 밝히지 않고 하는 투표이다. 무기명 투표를 하는 경우는 중복조합으로 생각할 수 있다.

5 어느 동아리 회장 선거에 3명이 출마하였다. 투표를 한 회원이 모두 15명이고, 이들 각각이 무기명으로 후보자 한 명을 적어 낼 때, 투표 결과의 경우의 수를 구하여라.
(단, 기권과 무효는 없다.)

실력 키우기

*다양한 유형에 대한 활용 능력을 키워 실력을 향상시키는 문제입니다.

1 12개의 과일을 담을 수 있는 바구니 한 개가 있다. 세 종류의 과일을 섞어서 바구니에 12개를 채우는 경우의 수를 구하여라.

2 사과 5개와 배 5개를 세 사람에게 나누어 주는 경우의 수를 구하여라.
(단, 모든 사람이 사과 또는 배를 적어도 1개씩 받는다.)

3 방정식 $x+y+z=10$을 만족하는 x, y, z에 대하여 다음을 구하여라.
(1) x, y, z의 음이 아닌 정수해의 개수
(2) x, y, z의 양의 정수해의 개수
(3) $x\geq1$, $y\geq2$, $z\geq3$을 만족하는 정수해의 개수

4 양의 부호 '+' 6개와 음의 부호 '−' 8개를 일렬로 배열할 때, 부호의 변화가 4번 생기는 경우의 수를 구하여라.

5 집합 $A=\{1, 2, 3\}$에서 집합 $B=\{4, 5, 6, 7, 8\}$로의 함수 $f: A \longrightarrow B$에 대하여 다음을 구하여라.
(1) 집합 A의 임의의 두 원소 a, b에 대하여 $a<b$이면 $f(a)<f(b)$를 만족하는 함수 f를 만드는 경우의 수
(2) 집합 A의 임의의 두 원소 a, b에 대하여 $a<b$이면 $f(a)\leq f(b)$를 만족하는 함수 f를 만드는 경우의 수

(1)은 중복을 허용하지 않지만 (2)는 중복을 허용한다.

개념 넓히기

함수의 개수 구하기

두 집합 $X=\{x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_m\}$, $Y=\{y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n\}$일 때, 여러 가지 함수 $f:X \longrightarrow Y$의 개수를 구하여 보자.

(1) 함수 f의 개수는 ${}_n\Pi_m=n^m$이다.

| 보기 | $X=\{1,\ 2\}$, $Y=\{0,\ 1,\ 2\}$일 때, 함수 f의 개수는 ${}_3\Pi_2=3^2=9$(개)

(2) $m\le n$일 때

① 일대일함수 f의 개수는 ${}_nP_m$이다.

| 보기 | $X=\{1,\ 2\}$, $Y=\{1,\ 2,\ 3\}$일 때, 일대일함수 f의 개수는 ${}_3P_2=6$(개)

② $a<b$이면 $f(a)<f(b)$인 함수 f의 개수는 ${}_nC_m$이다.

| 보기 | $X=\{1,\ 2,\ 3\}$, $Y=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$일 때, $a<b$이면 $f(a)<f(b)$인 함수 f의 개수는 ${}_5C_3=10$(개)

③ $a<b$이면 $f(a)\le f(b)$인 함수 f의 개수는 ${}_nH_m$이다.

| 보기 | $X=\{1,\ 2,\ 3\}$, $Y=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$일 때, $a<b$이면 $f(a)\le f(b)$인 함수 f의 개수는 ${}_4H_3=20$(개)

(3) $m\ge n$일 때, 치역이 Y인 함수 f의 개수는 서로 다른 m개의 물건을 n명에게 적어도 한 개씩 분배하는 방법의 수와 같다.

| 보기 | $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $Y=\{a,\ b,\ c\}$일 때, 치역이 Y인 함수 f의 개수는 서로 다른 5개의 물건을 세 사람에게 적어도 한 개씩 분배하는 방법의 수와 같다. 즉, 다음과 같으므로 구하는 함수 f의 개수는 $60+90=150$(개)

(ⅰ) 1개, 1개, 3개로 분할하여 분배하는 경우 ${}_5C_1\times{}_4C_1\times{}_3C_3\times\dfrac{3!}{2!}=60$(개)

(ⅱ) 1개, 2개, 2개로 분할하여 분배하는 경우 ${}_5C_1\times{}_4C_2\times{}_2C_2\times\dfrac{3!}{2!}=90$(개)

(4) $m=n$이면 일대일 대응이 존재하고, 일대일 대응인 함수 f의 개수는 $m!$이다.

| 보기 | $X=\{1,\ 2,\ 3\}$, $Y=\{1,\ 2,\ 3\}$일 때, 일대일 대응인 함수 f의 개수는 $3!=6$(개)

3. 이항정리

* $\square$ 안에 알맞은 것을 채워 가면서 교과서에서 학습한 내용을 확인해 보세요.

이항정리

① 두 개의 항으로 이루어진 $(a+b)$의 거듭제곱, 즉 $(a+b)^n$을 전개하는 것을 이항정리라고 한다.

② n이 자연수일 때

$$(a+b)^n={}_n\mathrm{C}_0a^n+{}_n\mathrm{C}_1a^{n-1}b+\cdots+{}_n\mathrm{C}_ra^{n-r}\boxed{(1)\quad}+\cdots+{}_n\mathrm{C}_nb^n$$

이때, 각 항의 계수

$${}_n\mathrm{C}_0,\ {}_n\mathrm{C}_1,\ {}_n\mathrm{C}_2,\ \cdots,\ {}_n\mathrm{C}_r,\ \cdots,\ {}_n\mathrm{C}_n$$

을 이항계수라 하고, $(r+1)$번째 항 ${}_n\mathrm{C}_ra^{n-r}b^r$을 일반항이라고 한다.

파스칼의 삼각형

① $n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \cdots$일 때, 다항식 $(a+b)^n$의 전개식에서 각 항의 계수를 다음과 같이 삼각형 모양으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{array}{lccccccccccc}
(a+b)^0\rightarrow &&&&&& 1 &&&&& \\
(a+b)^1\rightarrow &&&&& 1 && 1 &&&& \\
(a+b)^2\rightarrow &&&& 1 && 2 && 1 &&& \\
(a+b)^3\rightarrow &&& 1 && 3 && 3 && 1 && \\
(a+b)^4\rightarrow && 1 && 4 && 6 && 4 && 1 & \\
(a+b)^5\rightarrow & 1 && 5 && 10 && 10 && 5 && 1 \\
\vdots &&&&&& \vdots &&&&&
\end{array}
\quad\Rightarrow\quad
\begin{array}{ccccccccccc}
&&&&& 1 &&&&& \\
&&&& {}_1\mathrm{C}_0 && {}_1\mathrm{C}_1 &&&& \\
&&& {}_2\mathrm{C}_0 && {}_2\mathrm{C}_1 && {}_2\mathrm{C}_2 &&& \\
&& {}_3\mathrm{C}_0 && {}_3\mathrm{C}_1 && {}_3\mathrm{C}_2 && {}_3\mathrm{C}_3 && \\
& {}_4\mathrm{C}_0 && {}_4\mathrm{C}_1 && {}_4\mathrm{C}_2 && {}_4\mathrm{C}_3 && {}_4\mathrm{C}_4 & \\
{}_5\mathrm{C}_0 && {}_5\mathrm{C}_1 && {}_5\mathrm{C}_2 && {}_5\mathrm{C}_3 && {}_5\mathrm{C}_4 && {}_5\mathrm{C}_5 \\
&&&&& \vdots &&&&&
\end{array}$$

이와 같은 이항계수의 배열을 파스칼의 삼각형이라고 한다.

② 파스칼의 삼각형에서 다음을 알 수 있다.

(i) ${}_n\mathrm{C}_r={}_n\mathrm{C}_{n-r}$ (ii) ${}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}+{}_{n-1}\mathrm{C}_r={}_n\mathrm{C}_r$

이항정리의 성질

$(1+x)^n={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1x+{}_n\mathrm{C}_2x^2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_nx^n$임을 이용하면 다음을 알 수 있다.

① ${}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n=2^{\boxed{(2)}}$

② ${}_n\mathrm{C}_0-{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2-{}_n\mathrm{C}_3+\cdots+(-1)^n{}_n\mathrm{C}_n=\boxed{(3)\quad}$

⋯› 내용 정리가 부족한 학생은 **교과서 87~92쪽**을 공부하여 개념을 확실히 익히세요.

답 (1) b^r (2) n (3) 0

바 탕 다 지 기

*기초 개념을 확인하고 계산 능력을 기르기 위한 문제입니다.

| 함 께 하 기 |

1. 이항정리를 이용하여 다음 식을 전개하여라.

(1) $(x+3)^4$ (2) $(x-1)^5$

[풀이]

(1) $(x+3)^4$

$={}_4C_0\,x^4+{}_4C_1\,x^3\cdot3+{}_4C_2\,x^2\cdot3^2$
$\quad+{}_4C_3\,x\cdot3^3+{}_4C_4\cdot3^4$
$=x^4+12x^3+54x^2+108x+81$

(2) $(x-1)^5$

$={}_5C_0\,x^5+{}_5C_1\,x^4(-1)+{}_5C_2\,x^3(-1)^2$
$\quad+{}_5C_3\,x^2(-1)^3+{}_5C_4\,x(-1)^4$
$\quad+{}_5C_5(-1)^5$
$=x^5-5x^4+10x^3-10x^2+5x-1$

2. 다음 식의 값을 2^n의 꼴로 나타낼 때, n의 값을 구하여라.

$${}_{12}C_0+{}_{12}C_1+{}_{12}C_2+\cdots+{}_{12}C_{11}+{}_{12}C_{12}$$

[풀이]

다항식 $(1+x)^{12}$을 전개하면

$(1+x)^{12}={}_{12}C_0+{}_{12}C_1\,x+{}_{12}C_2\,x^2$
$\qquad+\cdots+{}_{12}C_{11}\,x^{11}+{}_{12}C_{12}\,x^{12}$

이 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$2^{12}={}_{12}C_0+{}_{12}C_1+{}_{12}C_2+\cdots+{}_{12}C_{12}$

$\therefore n=12$

| 스 스 로 하 기 |

1. 이항정리를 이용하여 다음 식을 전개하여라.

(1) $(x+2)^4$ (2) $(x-2)^5$

[풀이]

(1) $(x+2)^4$

$={}_4C_0\,x^4+{}_4C_1\,x^3\cdot2+{}_4C_2\,x^2\cdot2^2$
$\quad+{}_4C_3\,x\cdot2^3+{}_4C_4\cdot2^4$
$=x^4+\square\,x^3+\square\,x^2+\square\,x+\square$

(2) $(x-2)^5$

$={}_5C_0\,x^5+{}_5C_1\,x^4(-2)+{}_5C_2\,x^3(-2)^2$
$\quad+{}_5C_3\,x^2(-2)^3+{}_5C_4\,x(-2)^4$
$\quad+{}_5C_5(-2)^5$
$=x^5-\square\,x^4+\square\,x^3-\square\,x^2$
$\quad+\square\,x-32$

2. 다음 식의 값을 2^n의 꼴로 나타낼 때, n의 값을 구하여라.

$${}_{15}C_0+{}_{15}C_1+{}_{15}C_2+\cdots+{}_{15}C_{14}+{}_{15}C_{15}$$

[풀이]

다항식 $(1+x)^{15}$을 전개하면

$(1+x)^{15}={}_{15}C_0+{}_{15}C_1\,x+{}_{15}C_2\,x^2$
$\qquad+\cdots+{}_{15}C_{14}\,x^{14}+{}_{15}C_{15}\,x^{15}$

이 등식의 양변에 $x=\square$을 대입하면

$2^{\square}={}_{15}C_0+{}_{15}C_1+{}_{15}C_2+\cdots+{}_{15}C_{15}$

$\therefore n=\square$

교과서 89쪽

1 다항식 $(x+y)^{10}$의 전개식에서 x^5y^5의 계수를 구하여라.

교과서 91쪽

2 ${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n=256$일 때, 자연수 n의 값을 구하여라.

기본 익히기

*기본 실력을 확인하고 응용 능력을 기르기 위한 문제입니다.

$(a+b)^n$의 일반항은 ${}_n\mathrm{C}_r a^{n-r}b^r$이다.

1 $\left(ax-\dfrac{1}{x}\right)^5$의 전개식에서 x^3의 계수가 -80일 때, 실수 a의 값을 구하여라.

전개식의 일반항을 이용하여 상수항을 구한다.

2 다음 식의 전개식에서 상수항을 구하여라.

(1) $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^6$

(2) $(x^2+1)\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^8$

3 다음 부등식을 만족하는 자연수 n의 값을 구하여라.

$$2048 \le {}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2+{}_n\mathrm{C}_3+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n < 4096$$

4 ${}_{10}\mathrm{C}_0+2\,{}_{10}\mathrm{C}_1+2^2\,{}_{10}\mathrm{C}_2+\cdots+2^{10}\,{}_{10}\mathrm{C}_{10}$의 값을 구하여라.

5 다음 식의 값을 구하여라.

(1) $\log_2({}_{99}\mathrm{C}_0+{}_{99}\mathrm{C}_1+{}_{99}\mathrm{C}_2+\cdots+{}_{99}\mathrm{C}_{99})$

(2) $\log_2({}_{49}\mathrm{C}_1+{}_{49}\mathrm{C}_3+{}_{49}\mathrm{C}_5+\cdots+{}_{49}\mathrm{C}_{49})$

6 집합 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 15\}$의 부분집합 중 원소의 개수가 홀수인 부분집합의 개수를 구하여라.

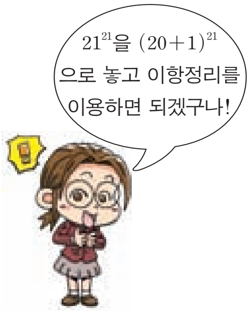
실력 키우기

*다양한 유형에 대한 활용 능력을 키워 실력을 향상시키는 문제입니다.

1 다음 식의 전개식에서 [ ] 안의 계수를 구하여라.

(1) $(1+x)^3(2+x)^4$ $[x]$

(2) $(1+x)+(1+x)^2+(1+x)^3+\cdots+(1+x)^{10}$ $[x^2]$



2 21^{21}을 1000으로 나눈 나머지를 구하여라.

3 $a_n={}_n\mathrm{C}_0+\frac{1}{3}{}_n\mathrm{C}_1+\left(\frac{1}{3}\right)^2{}_n\mathrm{C}_2+\cdots+\left(\frac{1}{3}\right)^n{}_n\mathrm{C}_n$일 때, $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}$을 n에 대한 식으로 나타내어라.

$(1+x)^n$의 전개식에서 미분을 이용한다.

4 다음 등식이 성립함을 증명하여라.

$$\boxed{{}_n\mathrm{C}_1+2{}_n\mathrm{C}_2+3{}_n\mathrm{C}_3+\cdots+n{}_n\mathrm{C}_n=n\cdot 2^{n-1}}$$

똑같은 상품과 서로 다른 상품이 각각 뽑히는 개수에 따른 경우의 수를 구하여 본다.

5 10개의 똑같은 상품과 21개의 서로 다른 상품을 합하여 모두 31개의 상품이 있다. 이 중에서 10개를 뽑는 서로 다른 경우의 수를 구하여라.

6 10개의 원소로 이루어진 집합 $A=\{a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_{10}\}$에 대하여 A의 부분집합 중 a_1을 포함하고 원소의 개수가 n개인 부분집합의 개수를 $f(n)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 10)$이라고 할 때

$$f(2)+f(4)+f(6)+f(8)+f(10)$$

의 값을 구하여라.

Ⅱ 대단원 확인하기

의사소통

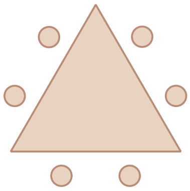
1 ★

주역에서는 '▬' 와 '▬ ▬' 두 가지 모양을 중복을 허용하여 세 개를 택하고, 이것을 세로로 배열하여 한 괘를 만든다. 괘를 만드는 경우의 수를 구하고, 이를 모두 그려 보아라.

이해

2 ★★

오른쪽 그림과 같은 정삼각형 모양의 탁자에 6명이 둘러앉는 경우의 수를 구하여라.



계산

3 ★

여섯 개의 숫자 카드 $\boxed{0}$, $\boxed{0}$, $\boxed{1}$, $\boxed{1}$, $\boxed{1}$, $\boxed{2}$ 에 대하여 다음 경우의 수를 구하여라.

(1) 일렬로 배열하는 경우의 수

(2) 여섯 자리의 자연수를 만드는 경우의 수

이해

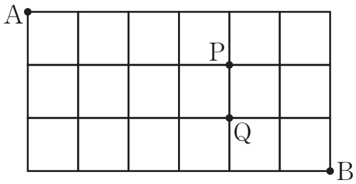
4 ★★

8명의 학생이 A, B, C 세 동아리에 나누어 가입하려고 한다. A 동아리에 2명, B 동아리에 3명, C 동아리에 3명이 가입하는 경우의 수를 구하여라.

문제 해결

5 ★★★

오른쪽 그림은 두 지점 A, B 사이의 도로망을 나타낸 것이다. 다음의 각 경우에 최단 거리로 가는 방법의 수를 구하여라.



(1) A 지점에서 B 지점으로 가는 경우

(2) A 지점에서 도로 PQ를 지나지 않고 B 지점으로 가는 경우

문제 해결

6 ★★

똑같은 공책 8권을 세 명에게 모두 나누어 주는 경우의 수를 구하여라.

(단, 모든 사람은 적어도 한 권의 공책을 받는다.)

이해

7 ★★

집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$일 때, 다음 조건을 만족하는 함수 $f: X \longrightarrow X$의 개수를 각각 구하여라. (단, $x_1 \in X$, $x_2 \in X$)

(1) $x_1 \neq x_2$이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$

(2) $x_1 < x_2$이면 $f(x_1) \leq f(x_2)$

계산

8 ★★

다항식 $(x+1)^5(3x-2)^4$의 전개식에서 x^2의 계수를 구하여라.

추론

9 ★★

n이 자연수일 때, 다음을 만족하는 자연수 n의 값을 구하여라.

$$500 < {}_nC_1 + {}_nC_2 + {}_nC_3 + \cdots + {}_nC_n < 1000$$

추론

10 ★★★

다음 등식을 증명하여라.

(1) ${}_{2n}C_0 + {}_{2n}C_2 + \cdots + {}_{2n}C_{2n} = {}_{2n}C_1 + {}_{2n}C_3 + \cdots + {}_{2n}C_{2n-1} = 2^{2n-1}$

(2) ${}_nC_0{}^2 + {}_nC_1{}^2 + {}_nC_2{}^2 + \cdots + {}_nC_n{}^2 = \dfrac{(2n)!}{n!n!}$

III 확률

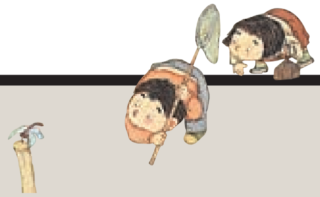
땀과 눈물의 결정체인 운동경기의 결과에는

우연성도 숨어 있다.

그러나 성공은 우연히 찾아오는 것이 아니라

각고의 노력 끝에 찾아낸

필연의 산물이다.



확률론의 정립자 콜모고로프

_Kolmogorov, A. N ; 1903~1987

콜모고로프는 그의 논문「확률론의 기초 개념 Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung (1933)」에서 기본적인 공리를 도입하여 확률론의 체계를 정립하였다.

이것은 힐베르트(Hilbert, D. ; 1862～1943)가 1901년 제1회 국제 수학자 대회에서 언급한 확률 부분에 대한 문제를 부분적으로 해결하는 이론으로 그의 대표적인 업적이다.

또 1938년에는 마르코프 이론에 대한 기초를 마련하여 확률론에서의 해석적 방법을 발표하였다.

러시아에서 가장 유명한 영재 학교의 이름이 '콜모고로프 수학 학교' 인데, 이것은 콜모고로프의 업적을 기리기 위하여 그의 이름을 붙인 것이다. 그는 말년에 이 학교의 교장으로 재직하면서 수학 교육의 발전에 기여하였다.

1 확률의 뜻과 활용

학습 목표
- 수학적 확률과 통계적 확률을 이해한다.
- 확률의 기본 성질을 이해한다.
- 확률의 덧셈정리와 여사건의 확률을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

1. 확률의 뜻과 기본 성질
2. 확률의 계산과 활용

야구 중계를 보거나 일기 예보를 들을 때, 확률이라는 단어가 자주 등장한다. 또한 로또에 당첨될 확률, 시험에 합격할 확률 등과 같이 확률이라는 단어는 이제 일상생활의 용어가 되었으며, 우리의 의사 결정에 있어서 빠질 수 없는 중요한 요소가 되었다.

확률의 뜻과 활용에 들어가기 전에

1. 유한집합의 원소의 개수

전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여

① $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

특히 $A\cap B=\varnothing$일 때, $n(A\cup B)=n(A)+n(B)$이다.

② $n(A^C)=n(U)-n(A)$

1 전체집합 $U=\{1, 2, 3, \cdots, 10\}$의 두 부분집합 A, B에 대하여

$n(A)=5$, $n(B)=4$,

$n(A\cap B)=3$

이 성립할 때, 다음을 구하여라.

(1) $n(A\cup B)$ (2) $n(A^C)$

2. 합의 법칙

두 사건 A, B가 일어나는 경우의 수가 각각 m, n이고, A, B가 동시에 일어나지 않을 때, A 또는 B가 일어나는 경우의 수는 $m+n$이다.

2 1에서 100까지의 자연수가 각각 적혀 있는 100장의 카드에서 임의로 한 장을 뽑을 때, 11 또는 13의 배수가 나오는 경우의 수를 구하여라.

3. 곱의 법칙

사건 A가 일어나는 경우의 수가 m이고, 그 각각에 대하여 사건 B가 일어나는 경우의 수가 n일 때, A, B가 함께 일어나는 경우의 수는 $m\times n$이다.

3 주사위 1개와 동전 1개를 동시에 던져서 위에 나오는 면을 조사할 때, 일어날 수 있는 모든 경우의 수를 구하여라.

4. 순열

① 서로 다른 n개에서 r개를 택하여 순서대로 배열하는 것을 n개에서 r개를 택하는 순열이라 하고, 이 순열의 수를 기호로 ${}_n\mathrm{P}_r$와 같이 나타낸다.

② ${}_n\mathrm{P}_r=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$

$$=\frac{n!}{(n-r)!}\ (\text{단, } 0\le r\le n)$$

③ ${}_n\mathrm{P}_n=n!$, $0!=1$, ${}_n\mathrm{P}_0=1$

4 네 개의 숫자 1, 2, 3, 4에서 서로 다른 세 개의 숫자를 사용하여 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수를 구하여라.

5. 조합

① 서로 다른 n개에서 순서를 생각하지 않고 r개를 택하는 것을 n개에서 r개를 택하는 조합이라 하고, 이 조합의 수를 기호로 ${}_n\mathrm{C}_r$와 같이 나타낸다.

② ${}_n\mathrm{C}_r=\dfrac{{}_n\mathrm{P}_r}{r!}=\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ (단, $0\le r\le n$)

③ ${}_n\mathrm{C}_0=1$, ${}_n\mathrm{C}_n=1$, ${}_n\mathrm{C}_r={}_n\mathrm{C}_{n-r}$

5 원 위에 n개의 점이 있다. 이들 점 중 6개를 택하여 만들 수 있는 육각형의 개수와 8개를 택하여 만들 수 있는 팔각형의 개수가 서로 같을 때, n의 값을 구하여라.

1. 확률의 뜻과 기본 성질

* $\boxed{}$ 안에 알맞은 것을 채워 가면서 교과서에서 학습한 내용을 확인해 보세요.

시행의 뜻

같은 조건에서 몇 번이고 반복할 수 있으며 그 결과가 우연에 의해서 정해지는 실험이나 관찰을 시행이라고 한다.

예를 들어 동전 던지기, 주사위 던지기, 제비뽑기 등은 같은 조건에서 몇 번이고 $\boxed{(1)}$할 수 있으며 그 결과는 우연에 의해서 정해지므로 $\boxed{(2)}$이다.

수학적 확률과 통계적 확률

① 어떤 시행의 표본공간 S가 n개의 근원사건으로 이루어져 있고, 각 근원사건이 일어날 가능성이 모두 같은 정도로 기대될 때, 사건 A가 r개의 근원사건으로 이루어져 있으면 사건 A가 일어날 확률 $\mathrm{P}(A)$를

$$\mathrm{P}(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\boxed{(3)}}{n}$$

와 같이 정의하고, 이것을 수학적 확률이라고 한다.

② 어떤 시행을 n번 반복할 때, 사건 A가 r_n번 일어난다고 하자. 이때, n을 한없이 크게 함에 따라 상대도수 $\frac{r_n}{n}$이 일정한 값 p에 가까워지면 p를 사건 A가 일어날 통계적 확률이라고 한다.

| **참고** | 실제로는 시행 횟수 n을 한없이 크게 할 수 없으므로 시행 횟수 n이 충분히 클 때의 상대도수 $\frac{r_n}{n}$을 보통 그 사건의 통계적 $\boxed{(4)}$로 본다.

③ 어떤 사건 A가 일어날 수학적 확률이 p일 때, 시행 횟수를 충분히 크게 하면 사건 A가 일어나는 상대도수 $\frac{r_n}{n}$은 수학적 확률 p에 가까워진다.

확률의 기본 성질

① 임의의 사건 A에 대하여 $\boxed{(5)}\le\mathrm{P}(A)\le 1$

② 반드시 일어나는 사건 S에 대하여 $\mathrm{P}(S)=\boxed{(6)}$

③ 절대로 일어나지 않는 사건 $\varnothing$에 대하여 $\mathrm{P}(\varnothing)=\boxed{(7)}$

···› 내용 정리가 부족한 학생은 **교과서 98~105쪽**을 공부하여 개념을 확실히 익히세요.

답 (1) 반복 (2) 시행 (3) r (4) 확률 (5) 0 (6) 1 (7) 0

바 탕 다 지 기

*기초 개념을 확인하고 계산 능력을 기르기 위한 문제입니다.

| 함 께 하 기 |

1. 1부터 100까지의 자연수가 각각 적힌 100장의 카드 중에서 한 장을 뽑을 때, 3의 배수가 적힌 카드가 나올 확률을 구하여라.

〔풀이〕
카드 한 장을 뽑는 모든 경우의 수는 100가지이다. 또 100 이하의 자연수 중에서 3의 배수가 나오는 경우는

$$3,\ 6,\ 9,\ \cdots,\ 96,\ 99$$

의 33가지이다.

따라서 구하는 확률은 $\frac{33}{100}$이다.

2. 어느 농구 선수가 200번의 자유투를 던져서 170번 성공하였다. 이 선수가 자유투를 한 번 던질 때, 성공할 확률을 구하여라.

〔풀이〕
200번의 시행 중 성공한 횟수가 170번이므로 이에 대한 상대도수는

$$\frac{170}{200}=\frac{17}{20}$$

따라서 구하는 확률은 $\frac{17}{20}$이다.

| 스 스 로 하 기 |

1. 1부터 50까지의 자연수가 각각 적힌 50장의 카드 중에서 한 장을 뽑을 때, 7의 배수가 적힌 카드가 나올 확률을 구하여라.

〔풀이〕
카드 한 장을 뽑는 모든 경우의 수는 50가지이다. 또 50 이하의 자연수 중에서 7의 배수가 나오는 경우는

$$7,\ 14,\ 21,\ 28,\ 35,\ 42,\ 49$$

의 $\square$가지이다.

따라서 구하는 확률은 $\frac{\square}{50}$이다.

2. 어느 양궁 선수가 500발의 화살을 쏘아서 과녁의 10점 칸을 285발 맞혔다. 이 선수가 화살을 한 발 쏠 때, 10점 칸을 맞힐 확률을 구하여라.

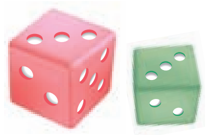
〔풀이〕
500번의 시행 중 10점 칸을 맞힌 횟수가 285번이므로 이에 대한 상대도수는

$$\frac{\square}{500}=\square$$

따라서 구하는 확률은 $\square$이다.

교과서 100, 101쪽

1 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 두 눈의 수의 곱이 홀수일 확률을 구하여라.



교과서 100, 101쪽

2 빨간색 장미꽃 4송이, 노란색 장미꽃 3송이 중에서 임의로 2송이를 뽑을 때, 빨간색 장미꽃 1송이, 노란색 장미꽃 1송이가 나올 확률을 구하여라.

기본 익히기

*기본 실력을 확인하고 응용 능력을 기르기 위한 문제입니다.

1 주머니 속에 흰 공 6개와 노란 공 4개가 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼낼 때, 다음을 구하여라.

(1) 흰 공이 나올 확률　　(2) 노란 공이 나올 확률

(3) 검은 공이 나올 확률　　(4) 흰 공 또는 노란 공이 나올 확률

2 쌀강정이 7개, 보리강정이 3개 들어 있는 강정 세트가 있다. 이 세트 하나에서 강정 4개를 꺼낼 때, 쌀강정이 2개, 보리강정이 2개 나올 확률을 구하여라.

3 소설책, 수필집, 시집, 음악책, 미술책 한 권씩을 책꽂이에 일렬로 꽂을 때, 다음을 구하여라.

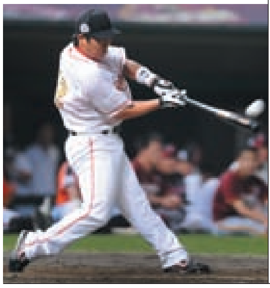
(1) 소설책이 왼쪽 끝에 올 확률

(2) 소설책, 수필집, 시집이 이웃할 확률

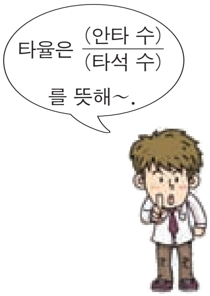
(3) 음악책과 미술책이 양쪽 끝에 올 확률

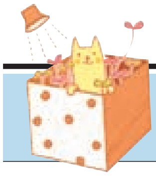
(2) 이웃하는 것을 한 묶음으로 생각한다.

4 상자 안에 n개의 공CD를 포함하여 총 10개의 CD가 들어 있다. 이 상자에서 CD 4개를 꺼낼 때, 4개가 모두 공CD일 확률이 $\frac{1}{14}$이라고 한다. n의 값을 구하여라.



5 어느 야구 선수의 지난 시즌까지의 통산 타율이 0.305였다. 이 선수가 이번 시즌에 200번 타석에 설 때, 칠 수 있는 안타의 개수를 추측하여라.





실 력 키 우 기

*다양한 유형에 대한 활용 능력을 키워 실력을 향상시키는 문제입니다.

원소의 개수가 n인 집합의 부분집합의 개수는 2^n이다.

1 집합 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$의 부분집합 중 한 개를 택할 때, 원소 2가 속해 있을 확률을 구하여라.

2 주사위 한 개를 두 번 던져서 처음에 나오는 눈의 수를 a, 나중에 나오는 눈의 수를 b라고 할 때, x에 대한 이차방정식 $x^2+ax+b=0$이 중근을 가질 확률을 구하여라.

3 여섯 개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6에서 서로 다른 네 개의 숫자를 택하여 네 자리 정수를 만들 때, 이 정수가 3400보다 클 확률을 구하여라.

나온 공에 적힌 번호의 최댓값이 8이려면 1에서 7까지 적힌 공 중에서 3개, 8이 적힌 공 1개를 꺼내야 한단다.

4 주머니 속에 1부터 10까지의 번호가 각각 적힌 10개의 공이 들어 있다. 이 중에서 4개의 공을 꺼낼 때, 나온 공에 적힌 번호의 최댓값이 8이 될 확률을 구하여라.

3개 모두 흰 공이 나올 통계적 확률을 생각한다.

5 주머니에 흰 공과 검은 공을 합하여 모두 10개의 공이 들어 있다. 이 주머니에서 3개의 공을 동시에 꺼내 보고 다시 넣는 시행을 여러 번 반복하였더니 여섯 번에 한 번 꼴로 3개가 모두 흰 공이었다. 이 주머니 속에 들어 있는 흰 공의 개수를 추측하여라.

개념 넓히기

통계적 확률에서 고려하여야 할 사항

주사위를 n번 던질 때, 1의 눈이 나오는 횟수가 r_n이면 그 상대도수는 다음과 같다.

$$\frac{(\text{1의 눈이 나오는 횟수})}{(\text{전체 시행 횟수})}=\frac{r_n}{n}$$

여기서 n을 충분히 크게 하면 상대도수 $\frac{r_n}{n}$은 어떤 값$\left(\text{이를테면 } \frac{1}{6}\right)$에 가까이 가게 될 것이고, $\frac{r_n}{n}$이 가까이 가는 값을 통계적 확률이라고 한다.

이러한 통계적 확률의 뜻에서 고려하여야 할 사항 세 가지를 알아보자.

첫째, 시행 횟수 n을 충분히 크게 한다는 것은 무슨 뜻인가? 어느 정도의 n이면 충분히 크다고 볼 수 있는가? n이 100이면 충분히 큰 것인가? 아니면 n이 백만 정도는 되어야 충분히 큰 것인가? 이러한 의문에 대한 답(누구나 그렇다고 인정하는 답)은 없다. 가장 그럴듯한 답은 '충분히 크다고 느낄 만큼 큰 것'이다. 그러나 이러한 답에 선뜻 수긍하기는 어렵다. 그러므로 통계적 확률을 구할 때, 시행 횟수 n을 정하는 일을 신중히 생각하여야 한다.

둘째, 상대도수 $\frac{r_n}{n}$이 어떤 값에 가까이 간다는 뜻은 무엇인가? $\frac{r_n}{n}$이 어떤 값에 가까이 간다고 할 수 있는가? 어떤 수열 $\{a_n\}$에서 a_n이 α에 가까이 가느냐, 가지 않느냐를 수학적으로 판정하는 것은 그리 어렵지 않은 일이다. 그러나 상대도수 $\frac{r_n}{n}$으로 이루어지는 수열에서는 일반항을 찾을 수 없기 때문에 이 수열의 수렴 여부를 판정하는 것은 쉬운 일이 아니다.

셋째, 상대도수 $\frac{r_n}{n}$이 가까이 가는 구체적인 값은 무엇인가? 즉, $\frac{r_n}{n}$의 극한값은 무엇인가? 주사위를 던질 때, 1의 눈이 나오는 상대도수 $\frac{r_n}{n}$의 극한값은 $\frac{1}{6}$이라고 많은 사람들은 의심 없이 믿고 있다. 그러나 윷을 던질 때, 윷짝의 볼록한 면이 나오는 상대도수 $\frac{r_n}{n}$에 대한 극한값은 아무도 언급하지 않는다. 그 이유는 주사위 던지기에서는 수학적 확률을 생각하기가 쉽고, 윷 던지기에서는 어렵기 때문이다. 다시 말하면 통계적 확률의 구체적인 값을 구하기는 매우 어려운 것이다.

프 로 젝 트

*수학적 개념을 보다 깊이 있게 탐구하고 적용해 보는 문제입니다.

카오스 게임

주사위를 던질 때, 윗면에 나오는 눈의 수를 항상 정확히 알아 맞히는 사람은 아무도 없다. 윗면에 나오는 눈의 수는 어떤 규칙에 의하여 나타나는 것이 아니고 단지 우연에 의한 것이기 때문이다. 즉, 주사위 던지기에서 각 시행의 결과에 대하여 우리는 '혼돈(混沌, chaos)' 의 상태에 있는 것이다.

그러나 이 시행을 여러 번 반복하면 규칙성을 찾을 수 있다.

다음과 같은 게임을 하여 보자.

1단계 정삼각형 ABC를 그리고, 삼각형의 변 위에 임의의 한 점을 찍는다.

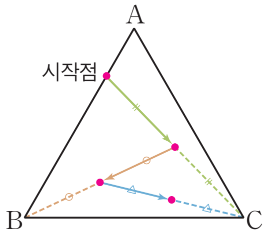
2단계 주사위를 던져서 나온 눈의 수에 따라 다음과 같이 새로운 점을 찍는다.

❶ 눈의 수가 1 또는 2일 때: 주어진 점과 점 A의 중점
❷ 눈의 수가 3 또는 4일 때: 주어진 점과 점 B의 중점
❸ 눈의 수가 5 또는 6일 때: 주어진 점과 점 C의 중점

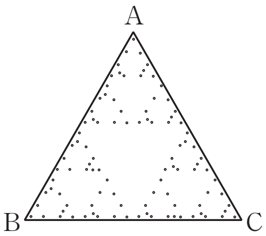
3단계 새로운 점에 대하여 위의 2단계를 반복한다.

게임 예시

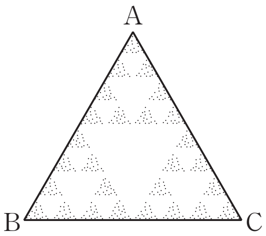
변 AB 위에 시작점을 찍고 주사위를 던져서 나온 눈의 수가 차례로 5, 3, 6일 때 다음과 같이 점을 찍는다.



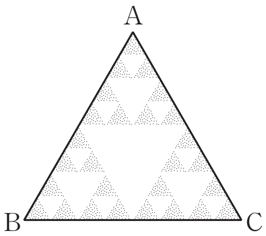
다음 그림은 위의 시행에서 반복하는 횟수를 각각 100, 500, 1500으로 하였을 때의 예시 그림이다.



반복 횟수: 100



반복 횟수: 500



반복 횟수: 1500

논술/수행 평가 과제

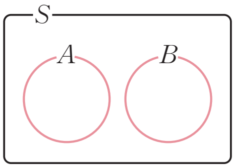
1. 교실 뒤에 커다란 종이를 붙여 놓고 학급 전체의 공동 작업으로 위의 게임을 하여 보자.
2. 공학 도구를 이용하여 위의 게임을 하여 보자.

2. 확률의 계산과 활용

* $\boxed{}$ 안에 알맞은 것을 채워 가면서 교과서에서 학습한 내용을 확인해 보세요.

배반사건의 뜻

두 사건 A, B에 대하여 A와 B 중 어느 한 사건이 일어나면 다른 사건은 일어나지 않을 때, 즉 $A\cap B=\varnothing$일 때, 두 사건 A, B는 서로 배반사건이라고 한다.



| 보기 | 두 사건 A, B에 대하여 $A=\{1,\ 3,\ 5\}$, $B=\{2,\ 4\}$이면 A와 B는 서로 $\boxed{\text{(1)}\quad}$사건이다.

확률의 덧셈정리

① 두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$$

② 두 사건 A, B가 서로 배반사건이면, 즉 $A\cap B=\varnothing$이면

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$$

| 보기 | 동전의 앞면을 H, 동전의 뒷면을 T로 나타낼 때, 동전을 세 번 던져서 앞면이 한 번 나오는 사건을 A, 두 번 나오는 사건을 B라고 하면

$$A=\{\mathrm{HTT},\ \mathrm{THT},\ \mathrm{TTH}\},\ B=\{\mathrm{HHT},\ \mathrm{HTH},\ \mathrm{THH}\}$$

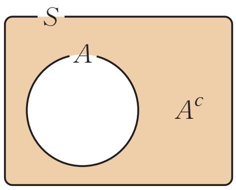
이므로 $\mathrm{P}(A)=\dfrac{3}{8}$, $\mathrm{P}(B)=\dfrac{3}{8}$이다. 이때, $A\cap B=\varnothing$이므로

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\boxed{\text{(2)}\quad}=\frac{\boxed{\text{(3)}\quad}}{4}$$

여사건의 확률

어떤 시행에서 사건 A가 일어나지 않는 사건을 A의 여사건이라 하고, 기호로 A^C과 같이 나타낸다. 이때, 여사건 A^C의 확률은

$$\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)$$



| 보기 | 동전을 세 번 던질 때, 앞면이 적어도 한 번 나오는 사건을 A라고 하면 A^C은 앞면이 한 번도 나오지 않는 사건이다. 이때, $\mathrm{P}(A^C)=\dfrac{1}{8}$이므로

$$\mathrm{P}(A)=1-\frac{\boxed{\text{(4)}\quad}}{8}=\boxed{\text{(5)}\quad}$$

···› 내용 정리가 부족한 학생은 **교과서 106~109쪽**을 공부하여 개념을 확실히 익히세요.

답 (1) 배반 (2) $\mathrm{P}(B)$ (3) 3 (4) 1 (5) $\dfrac{7}{8}$

바탕 다지기

*기초 개념을 확인하고 계산 능력을 기르기 위한 문제입니다.

| 함께 하기 |

1. 서로 배반사건인 A, B에 대하여

$$P(A)=0.3,\ P(A\cup B)=0.7$$

일 때, $P(B)$의 값을 구하여라.

[풀이]

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$에서

$$0.7=0.3+P(B)$$

$$\therefore P(B)=0.4$$

2. 5개의 제비 중에 당첨 제비가 2개 들어 있다. 이 제비에서 동시에 2개를 뽑을 때, 당첨 제비가 적어도 1개가 나올 확률을 구하여라.

[풀이]

당첨 제비가 적어도 1개가 나오는 사건을 A라고 하면 A^C은 당첨 제비가 1개도 나오지 않을 사건이므로

$$P(A^C)=\frac{{}_3C_2}{{}_5C_2}=\frac{3}{10}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{3}{10}=\frac{7}{10}$$

| 스스로 하기 |

1. 서로 배반사건인 A, B에 대하여

$$P(B)=0.2,\ P(A\cup B)=0.9$$

일 때, $P(A)$의 값을 구하여라.

[풀이]

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$에서

$$0.9=P(A)+\boxed{}$$

$$\therefore P(A)=\boxed{}$$

2. 필통에 빨간색 연필 7자루와 파란색 연필 3자루가 들어 있다. 필통에서 임의로 3자루의 연필을 꺼낼 때, 파란색 연필이 적어도 1자루가 나올 확률을 구하여라.

[풀이]

파란색 연필이 적어도 1자루가 나오는 사건을 A라고 하면 A^C은 3자루가 모두 빨간색 연필일 사건이므로

$$P(A^C)=\frac{{}_7C_3}{{}_{10}C_3}=\boxed{}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A)=1-P(A^C)=1-\boxed{}=\boxed{}$$

교과서 108쪽

1 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 눈의 수의 합이 3의 배수 또는 4의 배수가 될 확률을 구하여라.

교과서 108쪽

2 남학생 6명, 여학생 4명 중에서 청소 당번 3명을 뽑을 때, 3명 모두 남학생이거나 3명 모두 여학생일 확률을 구하여라.

기 본 익 히 기

*기본 실력을 확인하고 응용 능력을 기르기 위한 문제입니다.

1 두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A^C)=0.4,\ \mathrm{P}(B^C)=0.3,\ \mathrm{P}(A\cup B)=0.95$$

일 때, $\mathrm{P}(A\cap B)$의 값을 구하여라.

2 30장의 복권에 1등 당첨 복권이 1장, 2등 당첨 복권이 5장, 3등 당첨 복권이 10장 들어 있다. 이 복권 중에서 2장을 고를 때, 다음을 구하여라.

(1) 당첨 복권이 1장도 나오지 않을 확률

(2) 적어도 1장은 당첨 복권이 나올 확률

(2)의 여사건은 (1)이다.

3 한 개의 주사위를 두 번 던져서 나오는 눈의 수의 합과 12가 서로소일 확률을 구하여라.

12와 서로소인 수는 5, 7, 11이다.

4 1학년 학생 4명, 2학년 학생 5명, 3학년 학생 6명 중에서 3명의 대표를 선발할 때, 선발될 대표가 모두 같은 학년일 확률을 구하여라.

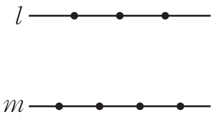
5 10개의 제비 중에서 3개의 제비를 뽑을 때, 적어도 1개의 당첨 제비를 뽑을 확률은 $\dfrac{29}{30}$이다. 당첨 제비의 개수를 구하여라.

(단, 각 제비가 뽑힐 확률은 같다.)

실 력 키 우 기

*다양한 유형에 대한 활용 능력을 키워 실력을 향상시키는 문제입니다.

1 오른쪽 그림과 같이 평행한 두 직선 l, m 위에 각각 3개, 4개의 점이 있다. 이 중에서 임의로 3개의 점을 택하여 모두 선분으로 이을 때, 그것이 삼각형이 될 확률을 구하여라.



❗ 오류 피하기
세 점이 한 직선 위에 있으면 삼각형이 만들어지지 않는다.

2 집합 $A=\{1, 2, 3, 4\}$의 부분집합 중에서 임의로 서로 다른 두 집합을 택할 때, 한 집합이 다른 집합의 진부분집합이 될 확률을 구하여라.

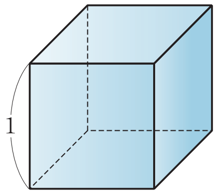
3 한 개의 주사위를 두 번 던져서 처음에 나오는 눈의 수를 a, 두 번째로 나오는 눈의 수를 b라고 할 때, 직선 $y=\frac{b}{a}x$의 기울기가 2 이하일 확률을 구하여라.

$a>0$이므로 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$이 성립할 조건은 $b^2-4ac<0$이다.

4 한 개의 주사위를 세 번 던져서 나오는 눈의 수를 차례로 a, b, c라고 할 때, 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$이 성립할 확률을 구하여라.

두 꼭짓점 사이의 거리는 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ 중 하나이다.

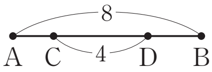
5 오른쪽 그림과 같이 한 모서리의 길이가 1인 정육면체의 꼭짓점 중에서 임의로 두 점을 택할 때, 두 점을 이은 선분의 길이가 $\frac{3}{2}$보다 작을 확률을 구하여라.



개념 넓히기

도형을 이용한 확률 구하기

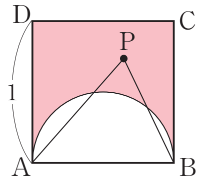
어떤 사건의 확률을 계산할 때 길이, 넓이, 부피 등이 이용되는 경우가 있다. 이러한 기하학적 확률에 관한 문제들을 살펴보자.



이를테면 오른쪽 그림과 같이 길이가 8인 선분 AB 위에 길이가 4인 선분 CD가 있다고 하자. 선분 AB 위의 임의의 한 점 E를 잡으면 이 점이 선분 CD 위에 있을 확률 p는

$$p=\frac{(\text{선분 CD의 길이})}{(\text{선분 AB의 길이})}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

이라고 할 수 있다.



또 오른쪽 그림과 같은 정사각형 ABCD의 내부에 임의로 점 P를 잡을 때, 삼각형 APB가 예각삼각형이 될 확률 p는

$$p=\frac{(\square\text{ABCD의 넓이})-(\text{반원의 넓이})}{(\square\text{ABCD의 넓이})}=1-\frac{\pi}{8}$$

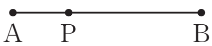
| **참고** | $\angle\text{APB}<90^\circ$가 되려면 점 P가 반원의 외부에 있어야 한다.

이처럼 근원사건이 연속적으로 변하여 그 개수를 셀 수 없는 경우의 확률은 다음과 같이 구할 수 있다.

> 어떤 영역 S 안에서 각각의 점을 잡을 가능성이 같은 정도로 기대된다고 하자. 영역 S에 포함되어 있는 영역 A에 대하여 영역 S에서 임의로 잡은 점이 영역 A에 속할 확률 $\mathrm{P}(A)$는
>
> $$\mathrm{P}(A)=\frac{(\text{영역 } A\text{의 크기})}{(\text{영역 } S\text{의 크기})}$$

확인학습

1 오른쪽 그림과 같은 선분 AB 위에 임의로 점 P를 잡을 때, $\overline{\text{AP}}\le 2\overline{\text{BP}}$가 성립할 확률 p를 구하여라.



실생활 문제 해결하기

*수학적 개념을 실생활 문제에 적용해 보는 문제입니다.

두 사람이 만날 확률

| 문제 | A, B 두 사람이 11시와 12시 사이에 어떤 장소에서 만나기로 하였다. 누가 먼저 도착하든지 10분 동안만 기다리기로 하였을 때, A와 B가 이 장소에서 만날 확률을 구하여라.

1단계_ 문제를 이해하여 보자.

(1) A와 B가 약속 장소에 도착하는 시각을 각각 11시 x분, 11시 y분이라고 할 때, x가 가질 수 있는 값의 범위와 y가 가질 수 있는 값의 범위를 구하여라.

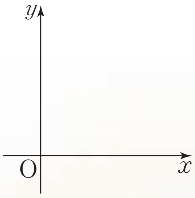
(2) A가 11시 30분에 도착한다고 할 때, 두 사람이 만나려면 B는 언제 도착하면 되는가?

(3) 두 사람이 만나기 위한 x, y 사이의 관계식을 구하여라.

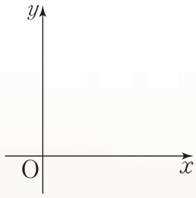
2단계_ 계획을 세워 보자.

(1) x, y가 가질 수 있는 값의 범위를 | 그림 1 | 에 나타내어라.

(2) | 그림 1 | 의 영역 안에서 1단계의 (3)에서 구한 x, y 사이의 관계식을 만족하는 영역을 | 그림 2 | 에 나타내어라.



| 그림 1 |



| 그림 2 |

3단계_ 문제를 풀어 보자.

(1) 2단계의 (1)에서 나타낸 영역의 넓이를 구하여라.

(2) 2단계의 (2)에서 나타낸 영역의 넓이를 구하여라.

(3) 두 사람이 만날 확률을 구하여라.

2 조건부확률

학습 목표

- 조건부확률을 구할 수 있다.
- 사건의 독립과 종속의 의미를 이해한다.
- 확률의 곱셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

1. 조건부확률과 확률의 곱셈정리

우산을 밖에서 잃어버렸다면 어느 곳에서 잃어버렸을 확률이 가장 클까? 만약 우산을 찾으러 간다면 어느 곳부터 먼저 가야 할까?

이 단원을 배우면 이러한 문제를 해결할 수 있다.

조건부확률에 들어가기 전에

1. 표본공간과 사건

어떤 시행에서 일어날 수 있는 모든 결과의 집합을 표본공간이라 하고, 표본공간의 부분집합을 사건이라고 한다.

1 주사위를 두 번 던져서 윗면에 나오는 눈의 수를 관찰할 때, 다음을 구하여라.

(1) 표본공간 S

(2) S의 부분집합 중에서 원소의 개수가 2인 집합의 개수

2. 확률의 기본 성질

① 임의의 사건 A에 대하여 $0 \le \mathrm{P}(A) \le 1$

② 반드시 일어나는 사건 S에 대하여 $\mathrm{P}(S)=1$

③ 절대로 일어나지 않는 사건 $\varnothing$에 대하여 $\mathrm{P}(\varnothing)=0$

2 남자 2명, 여자 3명 중에서 3명을 뽑을 때, 다음을 구하여라.

(1) 3명 모두 남자가 뽑힐 확률

(2) 여자가 반드시 포함될 확률

(3) 남자가 1명만 포함될 확률

3. 확률의 덧셈정리

① 두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A \cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A \cap B)$$

② 두 사건 A, B가 서로 배반사건이면

$$\mathrm{P}(A \cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$$

3 정이십면체 주사위의 각 면에 1부터 20까지의 자연수가 적혀 있다. 이 주사위를 한 번 던질 때, 다음을 구하여라.

(1) 2의 배수가 나올 확률

(2) 3의 배수가 나올 확률

(3) 2의 배수 또는 3의 배수가 나올 확률

4. 여사건의 확률

임의의 사건 A에 대하여

$$\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A) \text{ 또는 } \mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)$$

4 5개의 과일 귤, 사과, 배, 바나나, 포도 중에서 3개를 택할 때, 다음을 구하여라.

(1) 귤이 포함될 확률

(2) 귤이 포함되지 않을 확률

1. 조건부확률과 확률의 곱셈정리

* $\boxed{}$ 안에 알맞은 것을 채워 가면서 교과서에서 학습한 내용을 확인해 보세요.

● 조건부확률의 뜻

어떤 시행에서 사건 A가 일어났을 때, 사건 B가 일어날 확률을 사건 A가 일어났을 때의 사건 B의 조건부확률이라 하고, 기호로 $\mathrm{P}(B|A)$와 같이 나타낸다. 이때

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(\boxed{(1)\quad})}{\mathrm{P}(A)}\ (\text{단, } \mathrm{P}(A)\neq 0)$$

● 확률의 곱셈정리

$\mathrm{P}(A)>0$, $\mathrm{P}(B)>0$인 두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\boxed{(2)\quad}\mathrm{P}(A|B)$$

● 사건의 독립과 종속

두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)\ \text{또는}\ \mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A)$$

가 성립할 때, 두 사건 A, B는 서로 독립이라고 한다.

또 두 사건 A, B가 서로 독립이 아닐 때, 두 사건은 서로 $\boxed{(3)\quad}$이라고 한다.

● 독립인 사건에 대한 확률의 곱셈정리

두 사건 A, B가 서로 독립이기 위한 필요충분조건은

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\ (\text{단, } \mathrm{P}(A)>0,\ \mathrm{P}(B)>0)$$

● 독립시행의 뜻과 그 확률

① 각각의 시행이 같은 조건으로 반복되고 다른 시행의 결과에 영향을 받지 않을 때, 이러한 시행을 독립시행이라고 한다.

② 1회의 시행에서 사건 A가 일어날 확률을 p라고 할 때, n회의 독립시행에서 사건 A가 r회 일어날 확률 P_r는

$$\mathrm{P}_r=\boxed{(4)\quad}p^r q^{n-r}\ (\text{단, } q=1-p,\ r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

⋯› 내용 정리가 부족한 학생은 **교과서 112~118쪽**을 공부하여 개념을 확실히 익히세요.

답 (1) $A\cap B$ (2) $\mathrm{P}(B)$ (3) 종속 (4) ${}_n\mathrm{C}_r$

바 탕 다 지 기

*기초 개념을 확인하고 계산 능력을 기르기 위한 문제입니다.

| 함 께 하 기 |

1. 한 개의 주사위를 던져서 짝수의 눈이 나올 때, 그것이 소수일 확률을 구하여라.

[풀이]

짝수의 눈이 나오는 사건을 A, 소수의 눈이 나오는 사건을 B라고 하면 $A=\{2,\ 4,\ 6\}$, $B=\{2,\ 3,\ 5\}$, $A\cap B=\{2\}$이므로

$$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2},\ \mathrm{P}(B)=\frac{1}{2},$$

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{6}$$

구하는 확률은 사건 A가 일어났을 때의 사건 B의 조건부확률이므로

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{1}{3}$$

2. 어떤 문제를 풀 확률이 갑은 $\frac{3}{4}$, 을은 $\frac{4}{5}$라고 한다. 두 사람 중 적어도 한 사람이 문제를 풀 확률을 구하여라.

[풀이]

아무도 문제를 풀지 못할 확률은

$$\left(1-\frac{3}{4}\right)\times\left(1-\frac{4}{5}\right)=\frac{1}{20}$$

따라서 적어도 한 사람이 문제를 풀 확률은

$$1-\frac{1}{20}=\frac{19}{20}$$

| 스 스 로 하 기 |

1. 한 개의 주사위를 던져서 6의 약수의 눈이 나올 때, 그것이 짝수일 확률을 구하여라.

[풀이]

6의 약수의 눈이 나오는 사건을 A, 짝수의 눈이 나오는 사건을 B라고 하면

$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$, $B=\{2,\ 4,\ 6\}$,

$A\cap B=\{2,\ 6\}$이므로

$$\mathrm{P}(A)=\frac{\boxed{}}{3},\ \mathrm{P}(B)=\frac{\boxed{}}{2},$$

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{\boxed{}}{3}$$

구하는 확률은 사건 A가 일어났을 때의 사건 B의 조건부확률이므로

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\boxed{}$$

2. 어느 두 사격 선수의 명중률은 각각 0.8, 0.6이라고 한다. 두 선수가 각각 한 발씩 같은 표적에 사격을 할 때, 적어도 한 발이 명중될 확률을 구하여라.

[풀이]

아무도 명중시키지 못할 확률은

$$(1-0.8)\times(1-0.6)=\boxed{}$$

따라서 적어도 한 발이 명중될 확률은

$$1-\boxed{}=\boxed{}$$

교과서 117쪽

1 표본공간 $S=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$이고, 각 근원사건이 일어날 확률은 모두 같다고 하자. 두 사건 $A=\{2,\ 4,\ 6\}$, $B=\{3,\ 6\}$이 서로 독립인지 종속인지를 말하여라.

기 본 익 히 기

*기본 실력을 확인하고 응용 능력을 기르기 위한 문제입니다.

$\mathrm{P}(A\cap B)$
$=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)$
$=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A|B)$

1 두 사건 A, B에 대하여 $\mathrm{P}(A)=\frac{3}{5}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{4}{5}$, $\mathrm{P}(A|B)=\frac{1}{4}$ 일 때, $\mathrm{P}(B|A)$의 값을 구하여라.

2 두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A)=0.7,\ \mathrm{P}(B)=0.4,\ \mathrm{P}(A^C\cap B^C)=0.2$$

일 때, $\mathrm{P}(A|B)$의 값을 구하여라.

3 10개의 초콜릿 중에 6개에는 땅콩이 들어 있고, 4개에는 아몬드가 들어 있다. 이 중에서 두 개를 차례로 먹을 때, 첫 번째에는 땅콩이 들어 있는 초콜릿을, 두 번째에는 아몬드가 들어 있는 초콜릿을 먹을 확률을 구하여라.

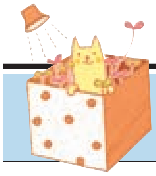
4 어느 학생이 1차 시험에 합격할 확률은 $\frac{1}{20}$이고, 1차 시험과 2차 시험에 모두 합격할 확률은 $\frac{1}{50}$이다. 이 학생이 1차 시험에 합격했을 때, 2차 시험에도 합격할 확률을 구하여라.

A, B가 서로 독립이면
$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$
A, B가 서로 종속이면
$\mathrm{P}(A\cap B)\neq\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$
(단, $\mathrm{P}(A)>0$, $\mathrm{P}(B)>0$)

5 한 개의 주사위를 던질 때, 나오는 눈의 수가 홀수인 사건을 A, 3 이하인 사건을 B, 4 또는 5인 사건을 C라고 하자. 다음 두 사건이 서로 독립인지 종속인지를 각각 말하여라.

(1) 사건 A와 사건 B (2) 사건 A와 사건 C

6 어떤 의약품의 치유율이 $\frac{3}{5}$이라고 한다. 이 의약품으로 4명의 환자를 치료할 때, 적어도 한 명이 치유될 확률을 구하여라.



실력 키우기

*다양한 유형에 대한 활용 능력을 키워 실력을 향상시키는 문제입니다.

1 두 사건 A, B에 대하여 $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{4}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{6}$이고
$\mathrm{P}(A|B)+\mathrm{P}(B|A)=\frac{1}{8}$일 때, $\mathrm{P}(A\cap B)$의 값을 구하여라.

2 두 사건 A, B가 서로 독립이고 $\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{6}{7}$, $\mathrm{P}(B^C)=\frac{2}{7}$일 때, $\mathrm{P}(A)$의 값을 구하여라.

3 참인 증거 3가지, 거짓인 증거 2가지가 있다. 거짓말을 할 확률이 $\frac{3}{10}$인 어떤 증인에게 증거 한 가지를 보여 주었을 때, 참인 증거라고 대답할 확률을 구하여라.

문제를 읽지 않고 답을 선택해서 1문제를 맞힐 확률은 $\frac{1}{2}$이다.

4 옳은 것에는 ○표, 옳지 않은 것에는 ×표를 하는 문제가 10개 출제된 시험에서 8개 이상을 맞혀야 합격할 수 있다고 한다. 어느 수험생이 문제를 전혀 읽지 않고 답을 선택할 때, 이 시험에서 합격할 확률을 구하여라.

5 어떤 배구 대회에서 결승에 진출한 두 팀 A, B가 5번의 경기를 하여 3번 먼저 이기면 우승한다고 한다. 두 팀 A, B의 경기에서 A 팀의 승률은 $\frac{3}{5}$이고, 우승 팀이 4번째 시합에서 결정될 확률이 $\frac{n}{m}$일 때, $m+n$의 값을 구하여라. (단, m, n은 서로소이고, 두 팀이 비기는 경우는 없다.)

Ⅲ 대단원 확인하기

계산

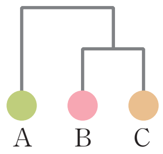
1 ★

두 개의 주사위를 던질 때, 나오는 눈의 수의 합이 3 또는 4일 확률을 구하여라.

추론

2 ★★

어떤 시합에서 A가 B를 이길 확률은 $\frac{1}{2}$, B가 C를 이길 확률은 $\frac{3}{4}$, C가 A를 이길 확률은 $\frac{1}{4}$이다. 오른쪽 그림의 대진표와 같이 A, B, C 세 사람이 토너먼트 방식으로 시합을 할 때, A가 우승할 확률을 구하여라. (단, 비기는 경우는 없다고 한다.)



이해

3 ★

두 명의 축구 선수가 한 번의 페널티 킥에서 공을 넣을 확률이 각각 0.9, 0.8이다. 이 두 선수에게 각각 한 번씩 페널티 킥이 주어질 때, 적어도 한 선수가 공을 넣을 확률을 구하여라.

문제 해결

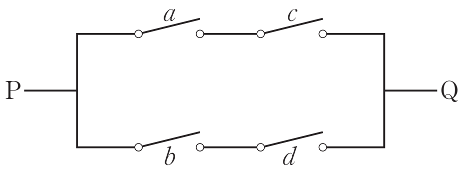
4 ★★★

동욱이가 학급 학생 40명을 대상으로 집에서 구독하는 신문의 종류를 조사하였더니 A, B 신문을 구독하는 학생이 각각 24명, 16명이었고, A, B 신문 중에서 어느 것도 구독하지 않는 학생이 8명이었다. A 신문을 구독하는 학생 중에서 한 명을 택하였을 때, 그 학생이 B 신문을 구독할 확률을 구하여라.

문제 해결

5 ★★★

다음 그림과 같은 회로에서 네 개의 스위치 a, b, c, d는 독립적으로 작동되며 닫혀 있을 확률은 각각 0.2, 0.3, 0.4, 0.5이다. P에서 Q로 전류가 흐를 확률을 구하여라.



계산

6 ★

4개의 동전을 던질 때, 적어도 1개가 앞면이 나올 확률을 구하여라.

의사소통

7 ★★

한 개의 동전을 두 번 던져서 첫 번째에 앞면이 나오는 사건을 A, 두 번째에 앞면이 나오는 사건을 B, 앞면과 뒷면이 한 번씩 나오는 사건을 C라고 할 때, A가 B, C와 각각 서로 독립인지 종속인지를 말하여라.

이해

8 ★★

주머니에 흰 공 2개와 검은 공 4개가 들어 있다. 이 주머니에서 공을 한 개 꺼내어 색을 확인하고 다시 넣는 시행을 10회 반복할 때, 흰 공이 8회 이하로 나올 확률을 구하여라.

이해

9 ★★

5개의 보기 중에 맞는 답을 고르는 오지선다형 문제가 10개 출제된 시험에서 9개 이상을 맞혀야 합격할 수 있다고 한다. 어느 수험생이 문제를 전혀 읽지 않고 답을 선택할 때, 이 시험에서 합격할 확률을 구하여라.

프 로 젝 트

*수학적 개념을 보다 깊이 있게 탐구하고 적용해 보는 문제입니다.

몬티 홀의 문제

몬티 홀의 문제는 미국의 TV 오락 프로그램인 'Let's make a deal'의 진행자 몬티 홀(Monty Hall)의 이름에서 유래되었다. 이 문제는 다음과 같다.

안이 보이지 않는 세 곳 중 한 곳에는 고급 자동차를, 나머지 두 곳에는 삐쩍 마른 염소를 넣어 두고, 프로그램 참여자에게 한 곳을 고르게 한다.

그리고 진행자인 몬티 홀이 나머지 두 곳 중 염소가 있는 곳을 보여 준 후, 참여자에게 선택을 바꿀지 여부를 묻는다. 여기서 참여자가 선택한 곳에 있는 것을 상품으로 받는다.

이 문제는 처음에 사람들을 매우 곤란하게 만들었다. 선택을 바꾸어 행운을 잡으면 좋지만, 거꾸로 선택을 바꾸어서 행운을 놓칠 수도 있기 때문이다.

그러나 결론은 '바꾸는 것이 좋다.' 이다. 선택을 바꾸면 행운을 잡을 확률이 $\frac{2}{3}$이고, 바꾸지 않으면 그 확률이 $\frac{1}{3}$이기 때문이다.

장막에 가려진 세 곳을 각각 1번, 2번, 3번이라고 할 때, 그곳에 자동차 또는 염소가 들어 있는 경우는 오른쪽 표와 같이 3가지이다. 이 중에서 참여자가 처음에 어떤 곳을 선택하더라도 안 바꾸는 것이 유리한 경우는 1가지이고, 바꾸는 것이 유리한 경우는 2가지이다.

1번	2번	3번
자동차	염소	염소
염소	자동차	염소
염소	염소	자동차

논술/수행 평가 과제

2명씩 짝을 정하여 몬티 홀의 문제를 모의실험하여 보고 선택을 바꾸면 행운을 잡을 확률이 $\frac{2}{3}$, 바꾸지 않으면 그 확률이 $\frac{1}{3}$임을 확인하여 보자.

읽기 자료

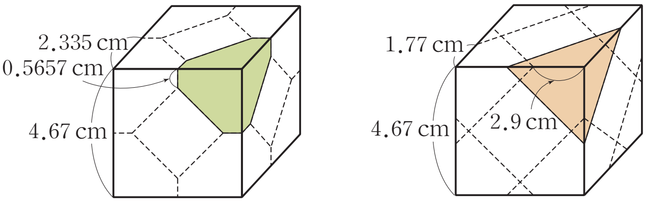
우리나라의 전통 주사위 목제주령구

경주 안압지에서 출토된 '목제주령구'라는 주사위는 보통 우리가 보아 온 6면체가 아니라 특이하게 14면체로 되어 있다. 이 주사위는 정사각형 모양의 면 6개와 육각형 모양의 면 8개로 이루어져 있다.

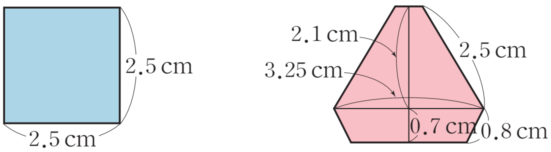
주사위의 각 면에는 금성작무(禁聲作儛, 소리내지 않고 춤추기), 농면공과(弄面孔過, 얼굴을 간질여도 꼼짝하지 않기), 임의청가(任意請歌, 누구에게나 마음대로 노래시키기), 월경일곡(月鏡一曲, 월경 한 곡조 부르기), 공영시과(空詠詩過, 시 한 수 읊기) 등과 같이 놀이와 관련된 모두 14개의 한자 어구가 음각되어 있다.

목제주령구는 정육면체 주사위에 비해 훨씬 많은 경우를 나타낼 수 있어 우리 선조들의 지혜를 엿볼 수 있다.

| 참고 | 목제주령구는 다음 그림과 같이 두 가지 방법으로 정육면체의 꼭짓점 부근을 잘라서 만들 수 있다.



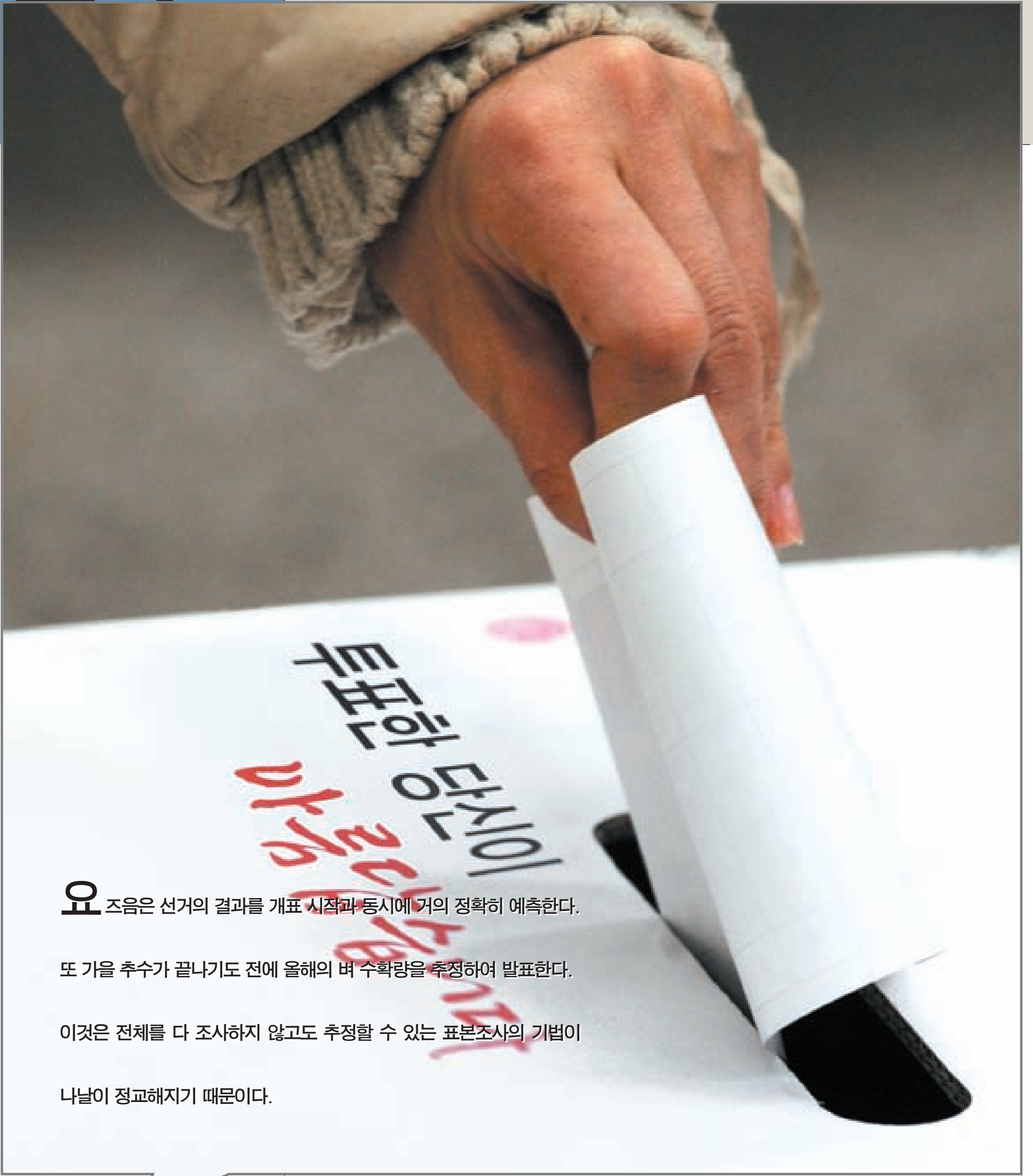
목제주령구에서 정사각형 모양의 면의 넓이는 6.25 cm^2이고 육각형 모양의 면의 넓이는 6.265 cm^2이다.



실제로 이 주사위를 만들어 던지는 실험을 한 결과는 다음과 같다.

면	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	합계
도수	73	74	66	39	59	56	31	48	34	39	60	39	42	40	700
상대도수	0.104	0.106	0.094	0.056	0.084	0.080	0.044	0.068	0.049	0.056	0.086	0.056	0.060	0.057	1

IV 통계



요즈음은 선거의 결과를 개표 시작과 동시에 거의 정확히 예측한다.

또 가을 추수가 끝나기도 전에 올해의 벼 수확량을 추정하여 발표한다.

이것은 전체를 다 조사하지 않고도 추정할 수 있는 표본조사의 기법이

나날이 정교해지기 때문이다.

현대통계학의 바탕을 이룬 네이만

_Neyman, J. ; 1894~1981

19세기 말에 태어난 네이만은 근대통계학을 완성한 피어슨(Pearson, K. ; 1857～1936)과의 협동 작업을 통하여 통계적 가설검정의 문제에 대한 명확한 해법을 제공하였다. 네이만의 업적은 현대통계학을 완성한 피셔(Fisher, R. A. ; 1890～1962)의 이론에 밑바탕이 되었다.

네이만은 가설검정법 뿐만 아니라 구간추정법을 계통적으로 발전시키고 층별 임의추출법에 기여하는 등 현대통계학의 발전에 크게 이바지하였다.

1 확률분포

학습 목표

- 확률변수와 확률분포를 이해한다.
- 확률변수의 평균과 표준편차를 구할 수 있다.
- 이항분포와 정규분포의 뜻을 알고, 그 성질을 이해할 수 있다.

1. 확률변수와 확률분포　　2. 평균과 표준편차　　3. 이항분포　　4. 정규분포

21세기 지식·정보화 사회의 특징은 대량의 자료 생산과 그 유통이라고 볼 수 있다. 이제는 백과사전보다는 컴퓨터에 더 많이 의존하여 자료를 검색하고 있다. 그러나 이들 자료를 검증 없이 맹신하는 것은 위험하다. 자료를 정리하고 분석하여 유용한 정보를 이끌어 냄으로써 실생활의 문제를 해결하는 것이 통계적인 사고방식이라고 할 수 있다.

확률분포에 들어가기 전에

1. 평균, 분산, 표준편차

n개의 자료 x_1, x_2, $\cdots$, x_n에 대하여

① 평균: $m=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)$

② 분산: $\sigma^2=\frac{1}{n}\{(x_1-m)^2+(x_2-m)^2+\cdots+(x_n-m)^2\}$

③ 표준편차: $\sigma=\sqrt{\sigma^2}$

1 다음은 영주가 어느 날 전화한 5번의 통화 시간이다. 통화 시간의 평균, 분산 및 표준편차를 구하여라.

83, 78, 93, 73, 88

2. 합의 기호 $\sum$의 뜻

a_1, a_2, $\cdots$, a_n의 합을 기호 $\sum$를 사용하여

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$$

로 나타낸다.

2 다음을 $\sum$를 써서 나타내어라.

(1) $p_1+p_2+\cdots+p_n$

(2) ${}_nC_0\,q^n+{}_nC_1\,pq^{n-1}+{}_nC_2\,p^2q^{n-2}+\cdots+{}_nC_n\,p^n$

3. $\sum$의 성질

① $\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$

② $\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n}b_k$

③ $\sum_{k=1}^{n}ca_k=c\sum_{k=1}^{n}a_k$ (단, c는 상수)

④ $\sum_{k=1}^{n}c=cn$ (단, c는 상수)

3 $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k^2=A$, $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k=m$이라고 할 때, $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k-m)^2$을 A, m으로 나타내어라.

4. 확률의 뜻과 기본 성질

① 표본공간 S가 n개의 근원사건으로 이루어져 있고, 각 근원사건이 일어날 가능성이 같은 정도로 기대될 때, r개의 근원사건으로 이루어진 사건 A가 일어날 확률은

$$\mathrm{P}(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{r}{n}$$

② $0\le\mathrm{P}(A)\le1$, $\mathrm{P}(S)=1$, $\mathrm{P}(\varnothing)=0$

4 한 개의 동전을 세 번 던질 때, 다음 확률을 구하여라.

(1) 앞면이 2번 나올 확률

(2) 앞면이 3번 나올 확률

1. 확률변수와 확률분포

* $\boxed{}$ 안에 알맞은 것을 채워 가면서 교과서에서 학습한 내용을 확인해 보세요.

● 확률변수

표본공간의 각 원소에 하나의 실수의 값을 대응시켜 주는 것을 확률변수라고 한다.

● 이산확률변수와 확률질량함수

① 확률변수 X가 유한개의 값 또는 자연수와 같이 셀 수 있는 값을 가질 때, X를 이산확률변수라 하고, X가 어떤 값 x를 가질 확률을 기호로 $\mathrm{P}(X=\boxed{(1)})$와 같이 나타낸다.
이때, $\mathrm{P}(X=\boxed{(2)})$를 확률질량함수라고 한다.

② 이산확률변수 X가 가지는 값과 그 값을 가질 확률과의 대응 관계를 X의 확률분포라고 한다.

● 확률질량함수의 성질

① $\mathrm{P}(X=x_i)=p_i\geq 0$ (단, $i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$)

② $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i=\boxed{(3)}$

③ $\mathrm{P}(x_i\leq X\leq x_j)=\sum\limits_{k=i}^{j} p_k$ (단, $i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n$이고, $i\leq j$이다.)

● 연속확률변수와 확률밀도함수

농작물의 무게, 사람의 키, 전구의 수명 시간 등과 같이 어떤 $\boxed{(4)}$의 모든 실수의 값을 가지는 확률변수를 연속확률변수라고 한다.

| 참고 | 연속확률변수 X에 대하여 어떤 적당한 함수 $f(x)$가 존재하여 $\mathrm{P}(X\leq x)$가 $\int_{-\infty}^{x} f(x)dx$로 표시될 때, $f(x)$를 연속확률변수 X의 확률밀도함수라고 한다.

● 확률밀도함수의 성질

연속확률변수 X의 확률밀도함수가 $f(x)\ (\alpha\leq x\leq\beta)$이면

① $f(x)\geq 0$

② $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx=1$

③ $\mathrm{P}(a\leq X\leq b)=\int_{a}^{b} f(x)dx$ (단, $\alpha\leq a\leq b\leq\beta$)

···› 내용 정리가 부족한 학생은 **교과서 124~130쪽**을 공부하여 개념을 확실히 익히세요.

답 (1) x (2) x (3) 1 (4) 구간

바탕 다지기

*기초 개념을 확인하고 계산 능력을 기르기 위한 문제입니다.

| 함께 하기 |

1. 다섯 장의 카드 [1], [2], [3], [4], [5] 에서 임의로 동시에 두 장의 카드를 뽑아 두 수의 차를 확률변수 X라고 할 때, X의 확률분포를 표로 나타내어라.

〔풀이〕

두 장의 카드를 뽑는 경우의 수는

${}_5C_2=10$(가지)

확률변수 X가 가지는 값은 1, 2, 3, 4이고, 각각의 경우는 다음과 같다.

$X=1$: $\{1, 2\}$, $\{2, 3\}$, $\{3, 4\}$, $\{4, 5\}$

$X=2$: $\{1, 3\}$, $\{2, 4\}$, $\{3, 5\}$

$X=3$: $\{1, 4\}$, $\{2, 5\}$, $X=4$: $\{1, 5\}$

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면

X	1	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	1

2. 연속확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$가

$$f(x)=k \ (\text{단, } 2\le x\le 8)$$

일 때, 다음을 구하여라.

(1) 상수 k의 값　　(2) $\mathrm{P}(3\le X\le 5)$

〔풀이〕

(1) $\int_2^8 k\,dx=\Big[kx\Big]_2^8=6k=1$

$\therefore k=\frac{1}{6}$

(2) $\int_3^5 \frac{1}{6}\,dx=\Big[\frac{1}{6}x\Big]_3^5=\frac{1}{3}$

| 스스로 하기 |

1. 네 장의 카드 [1], [2], [3], [4] 에서 임의로 동시에 두 장의 카드를 뽑아 두 수의 합을 확률변수 X라고 할 때, X의 확률분포를 표로 나타내어라.

〔풀이〕

두 장의 카드를 뽑는 경우의 수는

${}_4C_2=6$(가지)

확률변수 X가 가지는 값은 3, 4, 5, 6, 7이고, 각각의 경우는 다음과 같다.

$X=3$: $\{1, 2\}$, $X=4$: $\{1, 3\}$

$X=5$: $\{1, 4\}$, $\{2, 3\}$

$X=6$: $\boxed{\qquad}$, $X=7$: $\{3, 4\}$

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면

X	3	4	5	6	7	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\boxed{\quad}$	$\frac{1}{6}$	1

2. 연속확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$가

$$f(x)=\frac{1}{2}x-k \ (\text{단, } 2\le x\le 4)$$

일 때, 다음을 구하여라.

(1) 상수 k의 값　　(2) $\mathrm{P}(2\le X\le 3)$

〔풀이〕

(1) $\int_2^4\left(\frac{1}{2}x-k\right)dx=\left[\frac{1}{4}x^2-\boxed{\quad}\,x\right]_2^4=1$

$\therefore k=\boxed{\quad}$

(2) $\int_2^3\left(\frac{1}{2}x-\boxed{\quad}\right)dx=\boxed{\quad}$

교과서 127쪽

1 노란 공 2개와 파란 공 4개가 들어 있는 상자에서 임의로 2개를 꺼낼 때, 노란 공이 나오는 개수를 확률변수 X라고 하자. 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내고, 확률 $\mathrm{P}(X\ge 1)$을 구하여라.

기본 익히기

*기본 실력을 확인하고 응용 능력을 기르기 위한 문제입니다.

1 확률변수 X의 확률분포를 나타낸 표가 다음과 같을 때, 확률 $\mathrm{P}(2\le X\le 3)$을 구하여라.

X	1	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$2k$	$\frac{1}{4}$	k	$\frac{1}{4}$	1

2 서로 다른 세 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 눈의 수가 짝수인 주사위의 개수를 확률변수 X라고 하자. 확률변수 X의 확률분포를 나타낸 표가 다음과 같을 때, 두 실수 a, b의 값을 각각 구하여라.

X	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{a}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{b}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

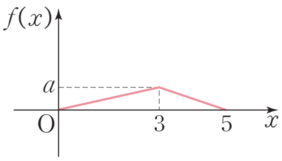
3 이산확률변수 X가 가지는 값이 1, 2, 3, …, 9, 10이고, 그 확률질량함수가 $\mathrm{P}(X=x)=kx$일 때, 상수 k의 값을 구하여라.

! **오류 피하기**
확률밀도함수 $f(x)$가 $0\le x\le 3$에서 정의되므로 $X\ge\frac{5}{2}$인 경우는 $\frac{5}{2}\le X\le 3$임에 주의한다.

4 연속확률변수 X의 확률밀도함수가 $f(x)=kx\ (0\le x\le 3)$일 때, 다음을 구하여라.

(1) 상수 k의 값　　(2) $\mathrm{P}(1\le X\le 2)$　　(3) $\mathrm{P}\left(X\ge\frac{5}{2}\right)$

5 어떤 고등학교 학생들의 주당 TV 시청 시간을 확률변수 X라고 할 때, X의 확률밀도함수 $f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같다. 확률 $\mathrm{P}(0\le X\le b)=\frac{1}{15}$일 때, 상수 a, b의 값을 각각 구하여라.



실력 키우기

*다양한 유형에 대한 활용 능력을 키워 실력을 향상시키는 문제입니다.

첫째항이 a이고, 공비가 r인 등비수열의 일반항은 ar^{n-1}

1 이산확률변수 X의 확률분포가 $\mathrm{P}(X=i)=p_i$ $(i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$일 때, 확률 $p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_4$가 이 순서로 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열을 이룬다고 한다. 확률 $\mathrm{P}(X=4)$를 구하여라.

2 원점 O를 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P가 있다. 동전 한 개를 던져서 앞면이 나오면 $+1$만큼, 뒷면이 나오면 -1만큼 점 P를 이동한다. 동전을 두 번 던질 때, 점 P의 좌표를 확률변수 X라 하고, 다음 물음에 답하여라.

(1) X의 확률분포를 표로 나타내어라.

(2) 확률 $\mathrm{P}(X\le 0)$을 구하여라.

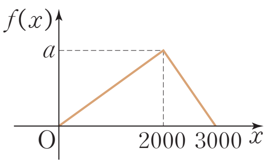
3 1부터 6까지의 숫자가 각각 적혀 있는 6장의 카드에서 동시에 3장을 뽑을 때, 뽑힌 카드에 적힌 수 중 가장 작은 수를 확률변수 X라고 하자. 확률 $\mathrm{P}(X\le 2)$를 구하여라.

4 연속확률변수 X의 확률밀도함수가 $f(x)=\frac{1}{4}x+k$ $(0\le x\le 2)$일 때, 다음 물음에 답하여라.

(1) 상수 k의 값을 구하여라.

(2) 조건부확률 $\mathrm{P}\left(X\ge \frac{1}{2}\,\middle|\, X\le 1\right)$을 구하여라.

5 어떤 공장에서 생산되는 전구의 수명 시간을 X라고 하면 X의 확률밀도함수 $f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같다고 한다. 이 공장에서 생산된 전구 2개를 구입하여 사용할 때, 적어도 1개는 2000시간 이상 사용하게 될 확률을 구하여라.



2. 평균과 표준편차

* $\boxed{}$ 안에 알맞은 것을 채워 가면서 교과서에서 학습한 내용을 확인해 보세요.

● 이산확률변수 X의 평균, 분산 및 표준편차

이산확률변수 X가 가지는 값이 x_1, x_2, $\cdots$, x_n이고 그 확률질량함수가

$$\mathrm{P}(X=x_i)=p_i\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

일 때, X의 평균(기댓값), 분산 및 표준편차는 다음과 같다.

① 평균: $\mathrm{E}(X)=x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i=m$

② 분산: $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}((X-m)^2)=\mathrm{E}(X^2)-\boxed{(1)}^2$

③ 표준편차: $\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}$

● 연속확률변수 X의 평균, 분산 및 표준편차

연속확률변수 X가 구간 $[\alpha,\ \beta]$의 모든 값을 가지고, 그 확률밀도함수가 $f(x)$일 때, X의 평균, 분산 및 표준편차는 다음과 같다.

① 평균: $\mathrm{E}(X)=\int_{\alpha}^{\beta}xf(x)dx=m$

② 분산: $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}((X-m)^2)=\int_{\alpha}^{\beta}(x-\boxed{(2)})^2f(x)dx$

$$=\int_{\alpha}^{\beta}\boxed{(3)}f(x)dx-m^2=\mathrm{E}(X^2)-m^2$$

③ 표준편차: $\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}$

● 확률변수 $aX+b$의 평균, 분산 및 표준편차

확률변수 $aX+b$ ($a\neq0$, b는 상수)의 평균, 분산 및 표준편차는 다음과 같다.

① 평균: $\mathrm{E}(aX+b)=a\mathrm{E}(X)+\boxed{(4)}$

② 분산: $\mathrm{V}(aX+b)=\boxed{(5)}\mathrm{V}(X)$

③ 표준편차: $\sigma(aX+b)=|a|\sigma(X)$

⋯› 내용 정리가 부족한 학생은 **교과서 131~139쪽**을 공부하여 개념을 확실히 익히세요.

답 (1) m (2) m (3) x^2 (4) b (5) a^2

바탕 다지기

*기초 개념을 확인하고 계산 능력을 기르기 위한 문제입니다.

| 함께 하기 |

1. 확률변수 X의 확률분포가 다음 표와 같을 때, $\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{V}(X)$를 구하여라.

X	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	1

〔풀이〕

$$\mathrm{E}(X)=1\cdot\frac{3}{10}+2\cdot\frac{2}{5}+3\cdot\frac{3}{10}=2$$

$$\mathrm{V}(X)=1^2\cdot\frac{3}{10}+2^2\cdot\frac{2}{5}+3^2\cdot\frac{3}{10}-2^2$$
$$=\frac{3}{5}$$

2. $\mathrm{E}(X)=2$, $\mathrm{V}(X)=4$일 때, 다음을 구하여라.

(1) $\mathrm{E}(3X+1)$ (2) $\mathrm{V}(-2X+3)$

〔풀이〕

(1) $\mathrm{E}(3X+1)=3\mathrm{E}(X)+1$
$=3\cdot2+1=7$

(2) $\mathrm{V}(-2X+3)=(-2)^2\,\mathrm{V}(X)$
$=4\times4=16$

| 스스로 하기 |

1. 확률변수 X의 확률분포가 다음 표와 같을 때, $\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{V}(X)$를 구하여라.

X	1	3	5	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

〔풀이〕

$$\mathrm{E}(X)=1\cdot\frac{1}{4}+3\cdot\frac{1}{2}+5\cdot\frac{1}{4}=\boxed{}$$

$$\mathrm{V}(X)=1^2\cdot\frac{1}{4}+3^2\cdot\frac{1}{2}+5^2\cdot\frac{1}{4}-\boxed{}$$
$$=\boxed{}$$

2. 확률변수 X의 평균이 3이고 분산이 4일 때, 확률변수 $-3X+2$의 평균과 분산을 구하여라.

〔풀이〕

$\mathrm{E}(-3X+2)=-3\mathrm{E}(X)+\boxed{}$
$=\boxed{}$

$\mathrm{V}(-3X+2)=(-3)^2\,\mathrm{V}(X)$
$=\boxed{}$

교과서 134, 137쪽

1 확률변수 X의 확률분포가 다음 표와 같을 때, 물음에 답하여라.

X	-3	-2	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

(1) $\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{V}(X)$를 각각 구하여라.

(2) $Y=3X+3$이라고 할 때, $\mathrm{E}(Y)$, $\mathrm{V}(Y)$를 각각 구하여라.

교과서 135쪽

2 연속확률변수 X의 확률밀도함수가 $f(x)=\frac{1}{2}\ (-1\le x\le1)$일 때, X의 평균, 분산 및 표준편차를 각각 구하여라.

기본 익히기

*기본 실력을 확인하고 응용 능력을 기르기 위한 문제입니다.

1 다음 표는 100명이 참가한 어느 경연 대회에서 입상자에 대한 상금 내역이다. 참가자 한 사람이 받을 수 있는 상금에 대한 기댓값을 구하여라.

순위	1등	2등	3등	4등	5등	등 외
인원(명)	1	2	5	10	15	67
상금(만 원)	10	5	3	2	1	0

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

2 확률변수 X에 대하여 $E(X)=5$, $V(X)=3$일 때, $E(X^2)$을 구하여라.

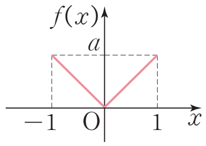
3 이산확률변수 X의 확률분포가 다음 표와 같을 때, 확률변수 $Y=3X+1$의 분산을 구하여라. (단, a는 상수)

X	1	2	3	4	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$2a$	$\frac{1}{4}$	a	1

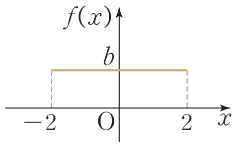
확률밀도함수 $f(x)$의 그래프와 x축 사이의 넓이는 1이다.

4 연속확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$의 그래프가 다음과 같을 때, X의 평균, 분산 및 표준편차를 구하여라.

(1)



(2)



5 어느 지역의 인구조사에서 가구당 가족 수를 확률변수 X라고 할 때, X의 확률분포는 다음 표와 같다. 확률변수 X의 평균, 분산 및 표준편차를 구하여라.

X	1	2	3	4	5	합계
$P(X=x)$	0.05	0.2	0.25	0.4	0.1	1

실력 키우기

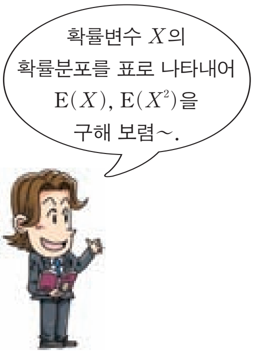
*다양한 유형에 대한 활용 능력을 키워 실력을 향상시키는 문제입니다.

1 확률변수 X의 확률분포가 오른쪽 표와 같을 때, 다음 물음에 답하여라.

X	-1	0	1	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	a	$\frac{a}{2}$	a^2	1

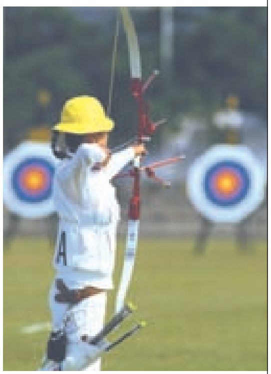
(1) 상수 a의 값을 구하여라.

(2) $\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{V}(X)$를 구하여라.



2 한 개의 주사위를 던져서 나오는 눈의 수를 확률변수 X라고 할 때, 확률변수 $4X-X^2$의 평균을 구하여라.

3 연속확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)=ax+b$ $(0\le x\le 3)$에 대하여 $f(3)=0$이 성립한다. 확률변수 X의 평균과 분산을 구하여라.



4 지애가 활을 한 발 쏠 때, 10점짜리 영역을 맞힐 확률은 $\frac{1}{4}$이다. 어느 날 지애가 활쏘기 연습에서 처음으로 10점짜리 영역을 맞힐 때까지 쏜 화살의 개수를 확률변수 X라고 하자. 확률변수 X의 평균을 구하여라.

5 평균이 m, 표준편차가 σ인 어떤 시험의 원점수 X를 다음과 같이 Y점수로 변환하였다.

$$Y=15\left(\frac{X-m}{\sigma}\right)+50$$

효주의 원점수 65점은 80점으로 변환되었고, 승오의 원점수 60점은 65점으로 변환되었을 때, 다음 물음에 답하여라.

(1) m과 σ를 각각 구하여라.

(2) 변환된 점수 Y의 평균과 표준편차를 각각 구하여라.

3. 이항분포

* □ 안에 알맞은 것을 채워 가면서 교과서에서 학습한 내용을 확인해 보세요.

이항분포의 뜻

한 번의 시행에서 사건 A가 일어날 확률이 p일 때, n번의 독립시행에서 사건 A가 일어나는 횟수를 X라고 하면 X는 0, 1, 2, $\cdots$, n의 값을 가지는 이산확률변수이고, X의 확률분포는 다음과 같다.

$$\mathrm{P}(X=x)={}_n\mathrm{C}_x p^x(1-p)^{n-x} \quad (\text{단, } x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

이와 같은 확률분포를 이항분포라 하고, 기호로 $\mathrm{B}(n,\ p)$와 같이 나타낸다.

이항분포의 평균, 분산 및 표준편차

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따르면

$$\mathrm{E}(X)=\boxed{(1)\quad},\quad \mathrm{V}(X)=\boxed{(2)\quad},\quad \sigma(X)=\sqrt{\boxed{(3)\quad}} \quad (\text{단, } q=1-p)$$

이항분포의 그래프의 성질

이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$에 대하여 이항분포의 그래프는

① p를 일정하게 하고 n을 크게 하면 점차 좌우 대칭인 모양에 가까워진다.

② n을 일정하게 하고 p를 0.5에 가깝게 하면 좌우 대칭인 모양에 가까워진다.

큰 수의 법칙

어떤 한 시행에서 사건 A가 일어날 수학적 확률이 p일 때, n번의 독립시행에서 사건 A가 일어나는 횟수를 X라고 하면 아무리 작은 양수 h를 택하더라도 다음이 성립한다.

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{P}\left(\left|\frac{X}{n}-\boxed{(4)\quad}\right|<h\right)=1$$

| 참고 | 큰 수의 법칙에 의하면 시행 횟수 n을 충분히 크게 하였을 때, 상대도수 $\frac{X}{n}$의 값은 수학적 확률 p와 같아짐을 알 수 있다. 따라서 수학적 확률을 구하기 곤란할 때에는 $\boxed{(5)\quad}$ 확률을 대신 사용한다.

…› 내용 정리가 부족한 학생은 **교과서 140~146쪽**을 공부하여 개념을 확실히 익히세요.

답 (1) np (2) npq (3) npq (4) p (5) 통계적

바탕 다지기

*기초 개념을 확인하고 계산 능력을 기르기 위한 문제입니다.

| 함께 하기 |

1. 한 개의 동전을 10번 던질 때, 앞면이 나오는 횟수를 확률변수 X라고 하자. 확률변수 X의 확률질량함수를 구하여라.

〔풀이〕

한 개의 동전을 던지는 것은 독립시행이고, 1회의 시행에서 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이다.

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, $\cdots$, 10이고, X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(10,\ \frac{1}{2}\right)$을 따른다.

따라서 구하는 확률질량함수는

$$\mathrm{P}(X=x)={}_{10}\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{10-x}={}_{10}\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

(단, $x=0,\ 1,\ \cdots,\ 10$)

2. 한 개의 동전을 n번 던질 때, 앞면이 나오는 횟수를 확률변수 X라고 하자. X의 평균이 36일 때, n의 값을 구하여라.

〔풀이〕

한 개의 동전을 던질 때, 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이다. 따라서 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(n,\ \frac{1}{2}\right)$을 따른다.

이때, $\mathrm{E}(X)=36$이므로

$$\frac{1}{2}n=36 \qquad \therefore n=72$$

| 스스로 하기 |

1. 한 개의 주사위를 10번 던질 때, 3의 배수의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X라고 하자. 확률변수 X의 확률질량함수를 구하여라.

〔풀이〕

한 개의 주사위를 던지는 것은 $\boxed{}$시행이고, 1회의 시행에서 3의 배수의 눈이 나올 확률은 $\boxed{}$이다. 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, $\cdots$, 10이고, X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(10,\ \boxed{}\right)$을 따른다.

따라서 구하는 확률질량함수는

$$\mathrm{P}(X=x)=\boxed{}$$

(단, $x=0,\ 1,\ \cdots,\ 10$)

2. 한 개의 주사위를 n번 던질 때, 3의 배수의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X라고 하자. X의 평균이 20일 때, n의 값을 구하여라.

〔풀이〕

한 개의 주사위를 던질 때, 3의 배수의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{3}$이다. 따라서 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(n,\ \frac{1}{3}\right)$을 따른다.

이때, $\mathrm{E}(X)=20$이므로

$$\boxed{}\,n=20 \qquad \therefore n=\boxed{}$$

교과서 142, 143쪽

1 발아율이 20 %인 씨앗 100개를 뿌렸을 때, 발아하는 씨앗의 개수를 확률변수 X라고 하자. 다음 물음에 답하여라.

(1) 확률변수 X가 가질 수 있는 값을 말하여라.

(2) 확률변수 X의 확률질량함수를 구하여라.

(3) 확률변수 X의 평균, 분산 및 표준편차를 구하여라.

기본 익히기

*기본 실력을 확인하고 응용 능력을 기르기 위한 문제입니다.

1 어떤 회사에서 생산되는 제품 전체의 10 %에 경품 교환권을 부착하였다고 한다. 이 회사에서 생산된 제품 5개를 구입하였을 때, 경품 교환권이 붙은 제품의 개수를 확률변수 X라고 하자. 확률변수 X의 확률질량함수를 구하여라.

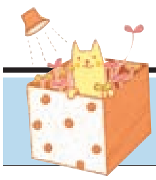
2 어떤 병뚜껑을 500번 던졌을 때, 윗면이 300번 나왔다. 이 병뚜껑을 5번 던져서 4번 이상 윗면이 나오면 이기는 시합을 할 때, 이길 확률을 구하여라.

$\mathrm{E}(X)=np$
$\sigma(X)=\sqrt{npq}$
(단, $q=1-p$)

3 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따르는 확률변수 X의 평균이 12, 표준편차가 3일 때, n, p의 값을 각각 구하여라.

4 한 개의 동전을 10번 던져서 앞면이 나오는 횟수 X에 대하여 상금으로 $(2X+100)$원을 받는 게임이 있다. 이 게임에서 받을 수 있는 상금의 기댓값을 구하여라.

5 어느 농장에서 생산되는 옥수수의 20 %가 특상품이다. 이 농장에서 생산된 옥수수 더미에서 옥수수 100개를 꺼낼 때, 나오는 특상품의 개수를 확률변수 X라고 하자. X^2의 평균을 구하여라.



실력 키우기

*다양한 유형에 대한 활용 능력을 키워 실력을 향상시키는 문제입니다.

1 흰 공 3개와 빨간 공 2개가 들어 있는 주머니에서 2개의 공을 동시에 꺼낸 후 다시 넣는 일을 10번 반복할 때, 같은 색의 공이 나오는 횟수를 확률변수 X라고 하자. 확률변수 X의 확률질량함수를 구하여라.

상금의 기댓값은 $\mathrm{E}(25^k)$이다.

2 한 개의 주사위를 10번 던져서 1의 눈이 나온 횟수가 k이면 상금으로 25^k원을 받는 게임에서 상금의 기댓값을 구하여라.

3 확률변수 X의 확률질량함수가

$$\mathrm{P}(X=x)={}_{18}\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{18-x}$$

일 때, $\displaystyle\sum_{x=0}^{18} x^2{}_{18}\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{18-x}$의 값을 구하여라.

확률변수 $(X-a)^2$의 평균
$\Longleftrightarrow \mathrm{E}((X-a)^2)$
$=\mathrm{E}(X^2-2aX+a^2)$

4 한 개의 주사위를 8번 던질 때, 소수의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X라고 하자. 상수 a에 대하여 확률변수 $(X-a)^2$의 평균의 최솟값을 구하여라.

5 어느 항공 노선에서 예약한 사람이 실제로 탑승하지 않을 확률이 10 % 라고 한다. 좌석 수가 200개인 항공기에 210명이 예약하였을 때, 남는 좌석 수의 평균을 구하여라.

4. 정규분포

* ☐ 안에 알맞은 것을 채워 가면서 교과서에서 학습한 내용을 확인해 보세요.

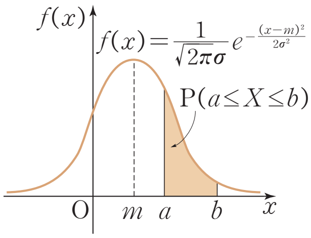
정규분포의 뜻

연속확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$가 다음 식과 같을 때, X는 정규분포를 따른다고 한다.

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \quad (\text{단, } -\infty<x<\infty)$$

평균이 m, 표준편차가 σ인 정규분포를 기호로 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$과 같이 나타낸다.

정규분포곡선의 성질



① 직선 $x=m$에 대하여 대칭인 종 모양의 곡선이고 점근선은 x축이다.

② 곡선과 x축 사이의 넓이는 $\boxed{(1)\quad}$이다.

③ $\mathrm{P}(a\le X\le b)$는 오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이이다.

④ $x=m$일 때, 최댓값 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$을 가진다.

⑤ m이 일정할 때, 표준편차 σ가 커지면 곡선은 양쪽으로 퍼지고 σ가 작아지면 곡선은 뾰족하게 된다.

⑥ σ가 일정할 때, m이 변하면 대칭축의 위치는 바뀌지만 곡선의 모양은 같다.

표준정규분포

평균이 0, 표준편차가 1인 정규분포를 표준정규분포라 하고, 기호로 $\boxed{(2)\qquad}$과 같이 나타낸다.

정규분포의 표준화

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따를 때, 확률변수 Z를

$$Z=\frac{X-\boxed{(3)\quad}}{\boxed{(4)\quad}}$$

이라고 하면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

이항분포와 정규분포의 관계

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따를 때, n이 충분히 크면 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(np,\ \boxed{(5)\quad})$를 따른다.

| 참고 | n이 $np\ge5$ 또는 $nq\ge5$를 만족할 때, n을 충분히 큰 값으로 생각한다.

⋯› 내용 정리가 부족한 학생은 **교과서 147~155쪽**을 공부하여 개념을 확실히 익히세요.

답 (1) 1 (2) $\mathrm{N}(0,\ 1)$ (3) m (4) σ (5) npq

바탕 다지기

*기초 개념을 확인하고 계산 능력을 기르기 위한 문제입니다.

| 함께 하기 |

1. 확률변수 Z가 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따를 때, 표준정규분포표를 이용하여 다음 확률을 구하여라.

(1) $\mathrm{P}(-1\le Z\le 2)$ (2) $\mathrm{P}(1\le Z\le 3)$

[풀이]

(1) $\mathrm{P}(-1\le Z\le 2)$

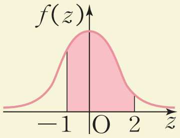
$=\mathrm{P}(-1\le Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 2)$

$=\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$

$\quad+\mathrm{P}(0\le Z\le 2)$

$=0.3413+0.4772$

$=0.8185$

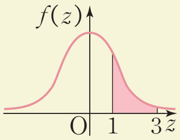


(2) $\mathrm{P}(1\le Z\le 3)$

$=\mathrm{P}(0\le Z\le 3)-\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$

$=0.4987-0.3413$

$=0.1574$



2. 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(30,\ 2^2)$을 따를 때, 확률 $\mathrm{P}(28\le X\le 32)$를 구하여라.

[풀이]

$\mathrm{P}(28\le X\le 32)$

$=\mathrm{P}\left(\dfrac{28-30}{2}\le\dfrac{X-30}{2}\le\dfrac{32-30}{2}\right)$

$=\mathrm{P}(-1\le Z\le 1)$

$=0.6826$

| 스스로 하기 |

1. 확률변수 Z가 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따를 때, 표준정규분포표를 이용하여 다음 확률을 구하여라.

(1) $\mathrm{P}(Z\le 1.96)$ (2) $\mathrm{P}(-1\le Z\le 3)$

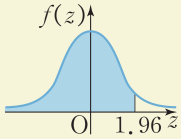
[풀이]

(1) $\mathrm{P}(Z\le 1.96)$

$=\mathrm{P}(Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1.96)$

$=0.5+\square$

$=\square$



(2) $\mathrm{P}(-1\le Z\le 3)$

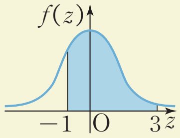
$=\mathrm{P}(-1\le Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 3)$

$=\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$

$\quad+\mathrm{P}(0\le Z\le 3)$

$=0.3413+\square$

$=\square$



2. 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(20,\ 3^2)$을 따를 때, 확률 $\mathrm{P}(14\le X\le 26)$을 구하여라.

[풀이]

$\mathrm{P}(14\le X\le 26)$

$=\mathrm{P}\left(\dfrac{14-20}{\square}\le\dfrac{X-20}{\square}\le\dfrac{26-20}{\square}\right)$

$=\mathrm{P}(\square\le Z\le\square)$

$=2\times\square=\square$

교과서 150쪽

1 확률변수 Z가 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따를 때, 다음 등식을 만족하는 상수 a의 값을 구하여라.

(1) $\mathrm{P}(Z\le a)=0.9495$ (2) $\mathrm{P}(Z\ge a)=0.1003$

기본 익히기

*기본 실력을 확인하고 응용 능력을 기르기 위한 문제입니다.

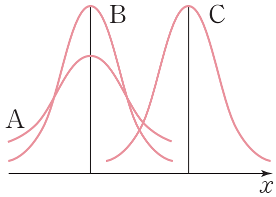
$Z=\frac{X-m}{\sigma}$으로 표준화한다.

1 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(60,\ 5^2)$을 따를 때, 표준정규분포표를 이용하여 다음 확률을 구하여라.

(1) $\mathrm{P}(X\leq 66)$ (2) $\mathrm{P}(63\leq X\leq 69)$

(3) $\mathrm{P}(X\geq 69)$ (4) $\mathrm{P}(54\leq X\leq 63)$

2 오른쪽 그림의 곡선 A, B, C는 각각 정규분포를 따르는 세 확률변수 X_{A}, X_{B}, X_{C}의 확률밀도함수의 그래프이다. 곡선 A, B의 대칭축은 서로 같고, 곡선 C는 곡선 B를 평행이동 한 것이다. X_{A}, X_{B}, X_{C}의 평균을 각각 m_{A}, m_{B}, m_{C}라 하고 표준편차를 각각 σ_{A}, σ_{B}, σ_{C}라고 할 때, 다음의 대소를 비교하여라.



(1) m_{A}, m_{B}, m_{C} (2) σ_{A}, σ_{B}, σ_{C}

3 한 개의 동전을 400번 던질 때, 앞면이 나오는 횟수가 190번 이상 220번 이하일 확률을 구하여라.

공장에서 생산되는 제품의 무게를 확률변수 X라고 할 때, 불량품은 $X\geq 40$인 경우이다.

4 어느 공장에서 생산되는 제품의 무게는 평균이 30 g, 표준편차가 5 g인 정규분포를 따른다고 한다. 제품의 무게가 40 g 이상이면 불량품으로 판정하여 폐기 처분한다. 이 공장에서 하루에 10000개의 제품을 생산할 때, 폐기 처분되는 불량품의 개수를 추측하여라.

5 혈압은 최고 혈압과 최저 혈압의 두 가지 수치로 나타내는데, 최고 혈압이 160 mmHg 이상이고, 최저 혈압이 100 mmHg 이상이면 고혈압이라고 한다. 어느 지역의 40대 주민의 혈압을 측정한 결과 최고 혈압은 평균이 130 mmHg, 표준편차가 15 mmHg인 정규분포를 따른다고 한다. 이 지역의 40대 주민 중에서 최고 혈압이 고혈압의 범위에 속하는 사람은 몇 %인지 구하여라.

실생활 문제 해결하기

*수학적 개념을 실생활 문제에 적용해 보는 문제입니다.

합격자의 최저 점수 구하기

| 문제 | 어느 대학에서는 400점 만점의 입학 전형 자료 점수로 신입생 242명을 선발한다. 이 대학에 지원한 학생 1000명의 입학 전형 자료 점수는 정규분포 $\mathrm{N}(300,\ 20^2)$을 따른다고 할 때, 합격자의 최저 점수를 구하여 보자.

1단계_ 문제를 이해하여 보자.

(1) 수험생의 점수를 확률변수 X라고 할 때, X의 확률분포를 말하여라.

(2) 신입생 1000명 중에서 242명이 선발될 확률을 구하여라.

2단계_ 계획을 세워 보자.

(1) 합격자의 최저 점수를 c라고 놓을 때, 확률 $\mathrm{P}(X \geq c)$를 말하여라.

(2) 확률 $\mathrm{P}(X \geq c)$를 표준화하여라.

3단계_ 문제를 풀어 보자.

(1) 2단계의 (1), (2)를 이용하여 식을 세우고, 표준정규분포표를 이용하여 c의 값을 구하여라.

(2) 합격자의 최저 점수는 몇 점인지 말하여라.

실력 키우기

*다양한 유형에 대한 활용 능력을 키워 실력을 향상시키는 문제입니다.

1 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르는 확률변수 X에 대하여

$$\mathrm{P}(X \le 12) = \mathrm{P}(X \ge 26)$$

일 때, m의 값을 구하여라.

2 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(18,\ 2^2)$을 따를 때

$$\mathrm{P}(0 \le Z \le 1) = 0.3413,\ \mathrm{P}(0 \le Z \le 2) = 0.4772$$

를 이용하여 $\mathrm{P}(a \le X \le b) = 0.8185$를 만족하는 정수 $a,\ b$의 값을 각각 구하여라. (단, $a > 15$)

등교 시간을 확률변수 X라 하고 X를 표준화하여 주어진 범위에 속할 확률을 구한다.

3 어느 고등학교 학생 750명의 등교 시간은 평균이 20분, 표준편차가 4분인 정규분포를 따른다고 한다. 다음 물음에 답하여라.

(1) 등교 시간이 12분 이상 16분 이하인 학생은 몇 %인지 구하여라.

(2) 등교 시간이 28분 이상인 학생의 수를 추측하여라.

4 어느 회사에서 238명의 신입 사원을 선발하기 위하여 입사 시험을 실시하였다. 응시자 2000명의 성적은 평균이 800점, 표준편차가 50점인 정규분포를 따른다고 할 때, 합격자의 최저 점수를 구하여라.

상위 63등 이내에 들 확률은 $\frac{63}{1000} = 0.063$이다.

5 어느 학교 학생 1000명의 수학 성적은 평균이 70점, 표준편차가 10점인 정규분포를 따른다고 한다. 이 학교 학생이 상위 63등 이내에 들기 위해서는 몇 점 이상을 받아야 하는지 구하여라.

읽기 자료

대규모 시험에서의 표준 점수

우리나라의 대학 수학 능력 시험이나 미국의 SAT 등과 같이 수험생이 많고, 과목 수도 여러 가지인 경우에는 항상 과목별 난이도의 차이로 인한 문제가 생긴다.

예를 들어 어떤 학생의 국어 점수가 80점, 수학 점수가 75점일 때, 80과 75의 단순 비교만으로는 국어 성적이 좋은지, 수학 성적이 좋은지 알 수 없다.

특히 선택 과목의 경우 선택에 따른 유리함 또는 불리함을 없애고 각 과목 사이의 난이도 조정을 위해서 표준 점수의 도입이 필수적이다. 표준 점수는 전체 응시자의 과목별 평균 점수와 표준편차를 이용하여 각 학생의 과목별 점수가 과목별 전체 평균 점수보다 얼마나 높은지 혹은 얼마나 낮은지를 비교하는 것이다.

표준 점수 중에서 T 점수는 전체 평균이 50점, 표준편차가 10점이 되도록 변환한 것이다.

예를 들어 각 학생의 수학에 대한 T 점수는 다음과 같이 계산한다.

$$T=50+10\times\frac{(\text{각 학생의 수학 원점수})-(\text{수학 점수의 평균})}{(\text{수학 점수의 표준편차})}$$

이 점수는 과목에 상관없이 약 $99.7\,\%$의 학생들의 점수가 15점에서 85점 사이에 있게 된다.

| 보기 | 전국 규모의 성취도 평가에서 A, B 두 학생의 과목별 점수가 다음과 같다고 하자.

구분	국어	영어	수학	과학	사회	합계
평균	70	60	50	75	80	
표준편차	8	6	10	7	5	
A 학생	86	75	52	82	90	385
B 학생	78	72	61	89	85	385

여기서 A, B 두 학생의 총점은 385점으로 같음을 알 수 있다.

그러나 다음과 같이 T 점수로 바꾸면 A 학생의 점수가 B 학생의 점수보다 높음을 알 수 있다.

구분	국어	영어	수학	과학	사회	합계
A 학생	70	75	52	60	70	327
B 학생	60	70	61	70	60	321

2 통계적 추정

학습 목표

- 표본평균과 모평균의 관계를 이해할 수 있다.
- 모평균을 추정하고 그 결과를 해석할 수 있다.
- 표본비율과 모비율의 관계를 이용하여 모비율을 추정하고, 그 결과를 해석할 수 있다.

1. 표본조사와 표본평균의 분포

2. 모평균과 모비율의 추정

매년 우리나라를 찾아오는 철새의 종류와 그 수는 우리 주변 환경에 대한 지표의 하나로 삼을 수 있다. 환경이 깨끗한 곳은 다양하고 많은 철새들이 찾아오지만, 환경이 오염된 곳은 철새들이 거의 찾아오지 않기 때문이다.

하늘을 뒤덮을 만큼 많은 철새의 수는 얼마나 될까? 저수지 곳곳에 둥지를 품은 새 중에서 올해 부화한 새는 몇 마리일까? 이렇게 일일이 조사하기 힘든 궁금증을 해결하고자 할 때, 통계적 방법은 유용한 도구가 된다.

통계적 추정에 들어가기 전에

1. 절댓값

① $|x|=\begin{cases} x & (x\geq 0) \\ -x & (x<0) \end{cases}$

② $a\geq 0$일 때

(i) $|x|\leq a \iff -a\leq x\leq a$

(ii) $|x|\geq a \iff x\leq -a$ 또는 $x\geq a$

2. 여사건의 확률

① 어떤 시행에서 사건 A가 일어나지 않는 사건을 A의 여사건이라 하고 A^C로 나타낸다.

② $\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)$

3. 순열의 수와 조합의 수

서로 다른 n개에서 r개를 택하는 순열의 수와 조합의 수는 다음과 같다.

① 순열의 수: ${}_n\mathrm{P}_r=\dfrac{n!}{(n-r)!}$ (단, $0\leq r\leq n$)

② 조합의 수: ${}_n\mathrm{C}_r=\dfrac{n!}{(n-r)!r!}$ (단, $0\leq r\leq n$)

4. 표준정규분포

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따를 때

$$Z=\frac{X-m}{\sigma}$$

은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

1 다음 부등식을 풀어라.

(1) $|x|\leq 1$

(2) $|x-10|\leq 2$

(3) $|x-1|\geq 3$

2 한 개의 동전을 5번 던져서 앞면이 나오는 횟수를 확률변수 X라고 할 때, 다음을 구하여라.

(1) $\mathrm{P}(X=0)$

(2) $\mathrm{P}(X\geq 1)$

3 남학생 3명, 여학생 3명에 대하여 다음 경우의 수를 구하여라.

(1) 6명을 일렬로 세우는 경우

(2) 남학생 2명, 여학생 2명을 뽑는 경우

4 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(70,\ 5^2)$을 따를 때, 다음 확률을 구하여라.

(1) $\mathrm{P}(X\geq 70)$

(2) $\mathrm{P}(X\leq 80)$

1. 표본조사와 표본평균의 분포

* $\boxed{}$ 안에 알맞은 것을 채워 가면서 교과서에서 학습한 내용을 확인해 보세요.

● 모집단과 표본

① 조사의 대상이 되는 집단 전체를 모집단이라 하고, 모집단 전체를 조사하는 것을 전수조사라고 한다.

② 모집단의 일부를 추출한 부분집합을 표본이라 하고, 표본을 조사하는 것을 표본조사라고 한다.

③ 모집단의 각 원소가 같은 확률로 추출되게 하는 것을 임의추출이라고 한다.

● 모평균과 표본평균

① 모집단의 평균, 분산, 표준편차를 각각 $\boxed{(1)\qquad}$, 모분산, 모표준편차라 하고, 각각 기호로 m, σ^2, σ와 같이 나타낸다.

② 표본의 평균, 분산, 표준편차를 각각 표본평균, 표본분산, 표본표준편차라 하고, 각각 기호로 $\overline{X}$, S^2, S와 같이 나타낸다. 어떤 모집단에서 크기 n인 표본을 임의추출하였을 때

$$\text{표본평균: } \overline{X}=\frac{1}{n}(X_1+X_2+\cdots+X_n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$$

$$\text{표본분산: } S^2=\boxed{(2)\qquad}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2,\ \text{표본표준편차: } S=\sqrt{S^2}$$

| 참고 | 표본평균, 표본분산, 표본표준편차는 표본에 따라 다른 값을 가지므로 확률변수이다.

● 표본평균 $\overline{X}$의 분포

모평균이 m이고 모표준편차가 σ인 모집단에서 크기 n인 임의표본을 복원추출할 때, 표본평균 $\overline{X}$에 대하여 다음이 성립한다.

① $\mathrm{E}(\overline{X})=m$, $\mathrm{V}(\overline{X})=\dfrac{\sigma^2}{n}$, $\sigma(\overline{X})=\dfrac{\boxed{(3)\qquad}}{\sqrt{n}}$

② 모집단의 분포가 정규분포이면 $\overline{X}$는 n의 크기에 관계없이 정규분포 $\mathrm{N}\left(\boxed{(4)\qquad},\ \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$을 따른다.

③ 모집단의 분포가 정규분포가 아닐 때에도 표본의 크기 n이 충분히 크면 $\overline{X}$의 분포는 정규분포 $\mathrm{N}\left(\boxed{(5)\qquad},\ \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$에 가까워진다.

···› 내용 정리가 부족한 학생은 **교과서 158~167쪽**을 공부하여 개념을 확실히 익히세요.

답 (1) 모평균 (2) $\dfrac{1}{n-1}$ (3) σ (4) m (5) m

바탕 다지기

*기초 개념을 확인하고 계산 능력을 기르기 위한 문제입니다.

| 함께하기 |

1. 우리나라 고등학교 학생들의 통계 처리 능력을 알아보기 위해 전국에서 임의로 뽑은 1000명의 학생을 대상으로 테스트를 하였다. 다음을 말하여라.

(1) 모집단　(2) 표본　(3) 표본의 크기

〔풀이〕

(1) 우리나라 고등학교 학생 전체

(2) 임의로 뽑힌 1000명의 고등학생

(3) 1000

2. 주머니 속에 1, 2, 3, 4의 숫자가 각각 적힌 공이 한 개씩 들어 있다. 다음 경우의 수를 구하여라.

(1) 복원추출로 1개씩 2번 꺼내는 경우

(2) 비복원추출로 1개씩 2번 꺼내는 경우

(3) 동시에 2개를 꺼내는 경우

〔풀이〕

(1) 첫 번째 꺼내는 경우가 4가지, 그 각각에 대하여 두 번째 꺼내는 경우가 4가지이므로 구하는 경우의 수는

$$4\times4=16(\text{가지})$$

(2) 첫 번째 꺼내는 경우가 4가지, 그 각각에 대하여 두 번째 꺼내는 경우가 3가지이므로 구하는 경우의 수는

$$4\times3=12(\text{가지})$$

(3) 4개에서 2개를 택하는 조합이므로

$${}_{4}C_{2}=6(\text{가지})$$

| 스스로 하기 |

1. 우리나라 농어촌 지역 고등학교의 정보화 환경을 알아보기 위해 농어촌 지역에서 임의로 뽑은 100개의 학교를 조사하였다. 다음을 말하여라.

(1) 모집단　(2) 표본　(3) 표본의 크기

〔풀이〕

(1) 우리나라 $\square$ 지역 고등학교 전체

(2) 임의로 뽑힌 $\square$ 지역 100개 고등학교

(3) $\square$

2. 주머니 속에 1, 2, 3, 4, 5의 숫자가 각각 적힌 카드가 한 개씩 들어 있다. 다음 경우의 수를 구하여라.

(1) 복원추출로 1개씩 2번 꺼내는 경우

(2) 비복원추출로 1개씩 2번 꺼내는 경우

(3) 동시에 2개를 꺼내는 경우

〔풀이〕

(1) 첫 번째 꺼내는 경우가 5가지, 그 각각에 대하여 두 번째 꺼내는 경우가 $\square$가지이므로, 구하는 경우의 수는

$$5\times\square=\square(\text{가지})$$

(2) 첫 번째 꺼내는 경우가 5가지, 그 각각에 대하여 두 번째 꺼내는 경우가 $\square$가지이므로, 구하는 경우의 수는

$$5\times\square=\square(\text{가지})$$

(3) 5개에서 2개를 택하는 조합이므로

$${}_{\square}C_{\square}=\square(\text{가지})$$

교과서 164쪽

1 정규분포 $N(60,\ 36)$을 따르는 모집단에서 크기가 9인 표본을 임의로 추출할 때, 표본평균 $\overline{X}$의 평균과 표준편차를 각각 구하여라.

기본 익히기

*기본 실력을 확인하고 응용 능력을 기르기 위한 문제입니다.

1 모집단의 확률변수 X의 확률분포가 다음 표와 같다.

X	-1	0	1	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{12}$	1

X의 확률분포에서 평균, 분산을 먼저 구한다.

이 모집단에서 크기가 5인 표본을 복원추출하여 그 표본평균을 $\overline{X}$라고 할 때, $\mathrm{E}(\overline{X}^2)$의 값을 구하여라.

2 1, 2, 2, 3, 3, 3의 숫자가 각각 적힌 공이 들어 있는 상자에서 크기가 n인 표본을 복원추출할 때, 공에 적힌 숫자의 평균 $\overline{X}$의 분산이 $\frac{5}{36}$이다. n의 값을 구하여라.

3 어떤 공장에서 생산되는 전구의 수명 시간을 X라고 하면 X는 평균이 2000시간, 표준편차가 200시간인 정규분포를 따른다고 한다. 이 제품 중에서 임의로 추출한 100개의 전구의 평균 수명 시간을 $\overline{X}$라고 할 때, 확률 $\mathrm{P}(2000 \le \overline{X} \le 2040)$을 구하여라.

4 어느 고등학교 2학년 학생의 키를 X라고 하면 X는 평균이 175 cm, 표준편차가 10 cm인 정규분포를 따른다고 한다. 이 학생들 중에서 임의로 뽑은 25명의 키의 평균 $\overline{X}$가 177 cm 이상 179 cm 이하일 확률을 구하여라.

5 정규분포 $\mathrm{N}(12,\ 12^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 표본평균을 $\overline{X}$라고 하자. $\mathrm{P}(12 \le \overline{X} \le 15) = 0.4332$일 때, n의 값을 구하여라.

실력 키우기

*다양한 유형에 대한 활용 능력을 키워 실력을 향상시키는 문제입니다.

1 어느 빵 하나의 무게는 평균이 50 g, 표준편차가 3 g인 정규분포를 따른다고 한다. 이 빵 4개를 하나의 상자에 포장하여 전시할 때, 이 상자 속의 빵의 무게의 합 S에 대하여 확률 $\mathrm{P}(188 \le S \le 206)$을 구하여라.

2 어느 회사에서 생산되는 샤프심의 길이를 X라고 하면 X는 평균이 80 mm, 표준편차가 8 mm인 정규분포를 따른다고 한다. 이 회사에서 생산된 샤프심 중에서 임의로 n개의 표본을 뽑아 그 평균 길이를 $\overline{X}$라고 할 때, $\mathrm{P}(\overline{X} \le 84) = 0.9938$이 성립한다. n의 값을 구하여라.

3 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 36^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 그 표본평균을 $\overline{X}$라고 할 때, $\mathrm{P}(|m-\overline{X}| \le 8) = 0.95$가 성립한다. n의 값을 구하여라. (단, $\mathrm{P}(|Z| \le 2) = 0.95$로 한다.)

모평균 50의 2 %는 1이다.

4 모평균이 50, 모표준편차가 5인 정규분포를 따르는 어떤 모집단에서 표본 100개를 임의추출한다고 하자. 표본평균이 모평균보다 2 % 이상 크게 나타날 확률을 구하여라.

표본평균을 $\overline{X}$라고 하면 $|\overline{X}-300| \ge 2$인 확률을 구하는 경우이다.

5 어느 도시의 가구당 월 소득은 평균이 300만 원이고 표준편차가 10만 원인 정규분포를 따른다고 한다. 이 도시에서 임의로 100가구를 표본으로 추출하였을 때, 이 100가구의 월 소득의 평균과 이 도시의 가구당 월 소득의 평균의 차가 2만 원 이상이 될 확률을 구하여라.

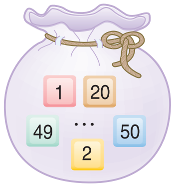
프로젝트

*수학적 개념을 보다 깊이 있게 탐구하고 적용해 보는 문제입니다.

임의추출의 여러 가지 방법

1. 제비뽑기를 이용한 임의추출

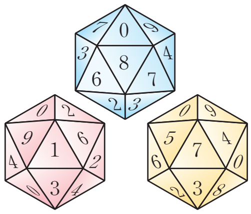
학생 수가 50명인 동아리에서 5명을 임의추출하기 위하여 50장의 종이에 1에서 50까지의 번호를 적은 제비를 주머니에 넣는다. 이 제비를 잘 섞은 다음, 임의로 5장을 추출하고, 추출된 제비에 해당하는 번호를 가진 학생을 표본으로 택하면 이것은 임의추출법에 의하여 추출된 것이다.



2. 난수주사위를 이용한 임의추출

난수주사위는 오른쪽 그림과 같이 0에서 9까지 숫자를 두 번씩 사용하여 정이십면체의 각 면에 숫자 하나씩을 새긴 것이다.

난수주사위를 이용하여 300명 중에서 5명을 임의추출해 보자.



❶ 각 사람에게 000에서 299까지의 번호를 붙인다.

❷ 서로 다른 색의 난수주사위 3개를 준비한다. 이를테면 빨간색, 파란색, 노란색을 준비한다. 이때, 빨간색, 파란색, 노란색 주사위에서 나오는 숫자를 각각 100의 자리 숫자, 10의 자리 숫자, 1의 자리 숫자로 정하고 3개의 주사위를 동시에 던지면 000에서 999까지의 수를 얻을 수 있다.

❸ 299 이하의 수가 5개 나오면 그 번호를 가진 다섯 사람을 순서대로 택한다.

3. 난수표를 이용한 임의추출

난수표는 0에서 9까지의 숫자를 임의로 배열한 표이다. 부록에 있는 난수표를 이용하여 50명 중에서 5명을 임의추출하는 방법을 알아보자.

41 10 50 81 22	94 80 71 10 68	23 58 20
13 49 57 94 72	78 92 78 78 04	17 00 92
33 87 89 24 77	65 37 12 38 63	76 49 69
15 91 02 97 10	37 14 47 47 79	81 63 34
37 94 89 58 24	29 22 39 42 66	95 14 63
48 06 32 88 07	06 19 13 11 04	45 95 73
92 65 65 69 32	05 63 75 76 57	26 10 31
48 66 49 80 78	34 30 47 61 73	44 31 65
23 50 07 82 24	34 88 84 90 39	20 46 32
47 02 38 86 81	59 77 46 17 55	54 59 00
39 65 34 38 46	26 95 15 80 70	40 06 89
90 36 99 74 53	71 05 53 69 01	49 59 53
46 60 38 92 08	09 16 06 33 02	13 60 78
62 67 74 04 84	75 68 64 11 42	22 88 64
21 17 44 02 71	21 59 79 73 18	24 74 77

❶ 각 사람에게 00에서 49까지의 번호를 붙인다.

❷ 제비뽑기나 난수주사위를 이용하여 난수표의 시작하는 행, 열을 정한다. 이를테면 이들이 14행 6열일 때 14행을 따로 쓰면 다음과 같다.

62 67 74 04 84 75 68
64 11 42 22 88 64 …

❸ 이 행의 6번째 숫자인 4부터 두 자리씩 오른쪽으로 나아가면서 쓴다. 이때, 이것이 나타내는 두 자리 수 중 50 이상인 것을 지우면 다음과 같다.

40 48 47 ~~56~~ ~~86~~ 41 14 22 28 ~~86~~ …

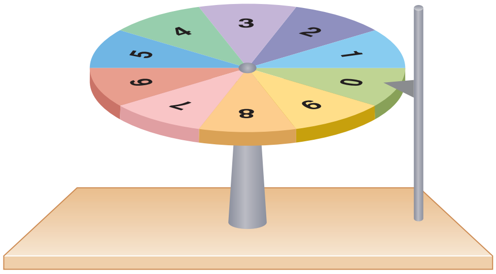
❹ 이와 같이 얻은 수 중에서 처음 5개의 수 40, 48, 47, 41, 14의 번호를 가진 사람을 택한다.

읽기 자료

KS(Korea Standard) 난수표

난수표를 최초로 만든 사람은 팁페트이다. 그 후 여러 종류의 난수표가 나왔는데 이 책의 부록에 있는 KS 난수표는 1963년 박한식 교수가 만든 것으로 우리나라 최초의 난수표이다. KS 난수표는 부록과 같은 것이 모두 40장으로 구성되어 있다. 따라서 숫자의 개수는 40000개이다.

이 난수표를 만들 당시 우리나라에 전자계산기가 없었기 때문에 오른쪽 그림과 같은 룰렛을 돌려서 나온 숫자를 하나씩 기록해 나가는 수작업으로 만들었다. 그런데 난수표는 숫자가 임의로 배열된 것이므로 그 임의성을 검정해야 한다. KS 난수표의 임의성을 검정하기 위하여 한 자리 검정, 두 자리 검정, 게프 검정, 포커 검정을 하였다.



1. 한 자리 검정

   이것은 숫자 각각을 한 자리 수로 볼 때 난수표의 숫자들이 임의로 배열되어 있는가를 보는 것이다. 이들 속에 들어 있는 0, 1, …, 9의 개수를 세어서 이상적인 개수와의 차이를 검정한다. 한 장에 1000개의 숫자가 들어 있으므로 각각 10개씩 들어 있는 것이 이상적이다.

2. 두 자리 검정

   이것은 숫자를 두 개씩 묶어서 두 자리 수로 볼 때 난수표의 수들이 임의로 배열되어 있는가를 보는 것이다. 이들 속에 있는 00, 01, …, 99의 개수를 세어서 이상적인 개수와의 차이를 검정한다. 한 장에 500개의 수가 들어 있으므로 각각 5개씩 들어 있는 것이 이상적이다.

3. 게프 검정

   이를테면 1000개의 숫자의 나열에서 0과 0 사이에 있는 숫자의 개수에 대한 통계를 내서 이들 개수가 나오는 확률과 대비하여 검정하는 것이다.

포커 검정은 여기서 다루지 않기로 한다.

2. 모평균과 모비율의 추정

* □ 안에 알맞은 것을 채워 가면서 교과서에서 학습한 내용을 확인해 보세요.

추정의 뜻

표본에서 얻은 정보를 이용하여 모집단의 평균, 표준편차 등을 추측하는 것을 추정이라고 한다.

모평균 m의 신뢰구간

① 신뢰도 95 %인 신뢰구간: $\overline{X}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{X}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

② 신뢰도 99 %인 신뢰구간: $\overline{X}-\boxed{(1)}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{X}+\boxed{(2)}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

| 참고 | 모표준편차 σ의 값을 알 수 없는 경우에 표본의 크기 n이 클 때에는 σ 대신 표본표준편차 S를 이용할 수 있다.

모비율과 표본비율

① 모집단의 어떤 사건에 대한 비율을 그 사건에 대한 모비율이라 하고, 기호로 p와 같이 나타낸다. 또 모집단에서 임의추출한 표본에서의 어떤 사건에 대한 $\boxed{(3)}$을 그 사건에 대한 표본비율이라 하고, 기호로 $\hat{p}$과 같이 나타낸다. 크기 n인 표본에서 어떤 사건이 일어난 횟수를 확률변수 X라고 할 때 $\hat{p}$은 다음과 같다.

$$\hat{p}=\frac{X}{\boxed{(4)}}$$

② 표본비율 $\hat{p}$은 표본의 크기 n이 충분히 클 때, 정규분포 $\mathrm{N}\left(\boxed{(5)},\ \frac{pq}{n}\right)$에 가까워지고

$Z=\dfrac{\hat{p}-p}{\sqrt{\dfrac{pq}{n}}}$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$에 가까워진다.

③ 모비율 p의 신뢰구간

(i) 신뢰도 95 %인 신뢰구간: $\hat{p}-1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\le p\le\hat{p}+1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$

(ii) 신뢰도 99 %인 신뢰구간: $\hat{p}-2.58\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\le p\le\hat{p}+2.58\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$

⋯› 내용 정리가 부족한 학생은 **교과서 168~178쪽**을 공부하여 개념을 확실히 익히세요.

답 (1) 2.58 (2) 2.58 (3) 비율 (4) n (5) p

바탕 다지기

*기초 개념을 확인하고 계산 능력을 기르기 위한 문제입니다.

| 함께 하기 |

1. 어떤 과수원에서 생산하는 사과의 무게는 표준편차가 10 g인 정규분포를 따른다고 한다. 이 사과 중에서 100개를 임의추출하여 무게를 조사하였더니 평균이 118 g이었다. 이 과수원에서 생산하는 사과 전체의 평균 무게를 m g이라고 할 때, m에 대하여 신뢰도 95 %인 신뢰구간을 구하여라.

[풀이]

모표준편차 $\sigma=10$, 표본평균 $\overline{x}=118$, 표본의 크기 $n=100$이므로 모평균 m에 대하여 신뢰도 95 %인 신뢰구간은

$$\overline{x}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le \overline{x}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$118-1.96\frac{10}{\sqrt{100}}\le m\le 118+1.96\frac{10}{\sqrt{100}}$$

$\therefore$ $116.04\le m\le 119.96$

2. 어느 선거에 출마한 A 후보에 대한 지지도를 알아보기 위해 유권자 100명을 임의추출하여 조사하였더니 20 %가 지지하는 것으로 나타났다. 전체 유권자의 지지율 p에 대하여 신뢰도 99 %인 신뢰구간을 구하여라.

[풀이]

표본비율 $\hat{p}=0.2$이고 표본의 크기 $n=100$이므로 모비율 p에 대하여 신뢰도 99 %인 신뢰구간은

$$\hat{p}-2.58\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\le p\le \hat{p}+2.58\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$$

$$0.2-2.58\sqrt{\frac{0.2\times0.8}{100}}\le p$$

$$\le 0.2+2.58\sqrt{\frac{0.2\times0.8}{100}}$$

$\therefore$ $0.0968\le p\le 0.3032$

| 스스로 하기 |

1. 어떤 과수원에서 생산하는 배의 무게는 표준편차가 25 g인 정규분포를 따른다고 한다. 이 배 중에서 100개를 임의추출하여 무게를 조사하였더니 평균이 235 g이었다. 이 과수원에서 생산하는 배 전체의 평균 무게를 m g이라고 할 때, m에 대하여 신뢰도 99 %인 신뢰구간을 구하여라.

[풀이]

모표준편차 $\sigma=25$, 표본평균 $\overline{x}=235$, 표본의 크기 $n=100$이므로 모평균 m에 대하여 신뢰도 99 %인 신뢰구간은

$$\overline{x}-2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le \overline{x}+2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$235-2.58\frac{\boxed{}}{\sqrt{100}}\le m\le 235+2.58\frac{\boxed{}}{\sqrt{100}}$$

$\therefore$ $\boxed{}\le m\le \boxed{}$

2. 어느 정책 A에 대한 찬성률을 알아보기 위해 주민 400명을 임의추출하여 조사하였더니 64 %가 찬성하는 것으로 나타났다. 전체 주민의 찬성률 p에 대하여 신뢰도 95 %인 신뢰구간을 구하여라.

[풀이]

표본비율 $\hat{p}=0.64$이고 표본의 크기 $n=400$이므로 모비율 p에 대하여 신뢰도 95 %인 신뢰구간은

$$\hat{p}-1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\le p\le \hat{p}+1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$$

$$0.64-1.96\sqrt{\frac{0.64\times0.36}{400}}\le p$$

$$\le 0.64+\boxed{}\sqrt{\frac{0.64\times0.36}{\boxed{}}}$$

$\therefore$ $0.59296\le p\le \boxed{}$

기본 익히기

*기본 실력을 확인하고 응용 능력을 기르기 위한 문제입니다.

1 어떤 전구 공장에서 생산된 전구의 수명 시간은 정규분포를 따른다고 한다. 이 전구 중에서 100개를 임의추출하여 수명 시간을 조사하였더니 평균이 1000시간, 표준편차가 50시간이었다. 이 공장에서 생산된 전구 전체의 평균 수명 시간 m에 대하여 다음을 구하여라.

(1) 신뢰도 95 %인 신뢰구간 (2) 신뢰도 99 %인 신뢰구간

2 어느 논에서 자란 벼 이삭의 이삭당 낱알 수는 평균이 m알인 정규분포를 따른다고 한다. 이삭 100개를 임의추출하여 이삭당 낱알 수를 조사하였더니 평균이 80알, 표준편차가 20알이었다. 모평균 m에 대하여 신뢰도 95 %인 신뢰구간이 $76.08 \le m \le a$일 때, 상수 a의 값을 구하여라.

3 어느 지역 보건소에서 주민들의 건강 상태를 알아보기 위해 400명을 임의추출하여 조사하였더니 40명이 과체중이었다고 한다. 이 지역 전체 주민의 과체중률 p에 대하여 신뢰도 95 %인 신뢰구간을 구하여라.

$[\overline{X}-0.1\sigma,\ \overline{X}+0.1\sigma]$
$\Longleftrightarrow \overline{X}-0.1\sigma \le m \le \overline{X}+0.1\sigma$

4 정규분포를 따르는 모집단의 표준편차를 σ라고 할 때, 이 모집단에서 추출한 크기가 n인 표본의 표본평균을 $\overline{X}$라고 하자. 모평균 m에 대하여 신뢰도 95 %인 신뢰구간이 $[\overline{X}-0.1\sigma,\ \overline{X}+0.1\sigma]$가 되게 하려고 할 때, n의 값을 구하여라. (단, $\mathrm{P}(|Z| \le 2)=0.95$로 한다.)

5 어느 회사에서 생산되는 치약의 무게는 표준편차가 11 g인 정규분포를 따른다고 한다. 이 회사에서 생산된 치약 중 n개의 표본을 임의추출하여 무게를 조사하였더니 평균이 80 g이었다. 모평균 m에 대하여 신뢰도 95 %인 신뢰구간이 $78 \le m \le 82$일 때, n의 값을 구하여라.

(단, $\mathrm{P}(|Z| \le 2)=0.95$로 한다.)

실력 키우기

*다양한 유형에 대한 활용 능력을 키워 실력을 향상시키는 문제입니다.

1 어떤 공장에서 생산된 제품의 무게는 표준편차가 40 g인 정규분포를 따른다고 한다. 이 제품 중에서 임의로 표본을 추출하여 신뢰도 95 %로 모평균을 추정하려고 할 때, 모평균과 표본평균의 차를 4 g 이하로 하려면 표본을 몇 개 이상 택해야 하는지 구하여라.

신뢰도 95 %인 신뢰구간의 길이는

$2\times1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

2 정규분포를 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 신뢰도 95 %로 모평균을 추정하였더니 신뢰구간의 길이는 $3.92d$이었다. 표본의 크기를 $4n$으로 하여 신뢰도 99 %로 모평균을 추정할 때, 신뢰구간의 길이를 d에 대한 식으로 나타내어라.

3 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따를 때, 임의로 추출한 크기가 n인 표본평균 $\overline{X}$에 의한 모평균 m의 신뢰구간은 신뢰도 98 %로 추정하면

$$\overline{X}-\frac{k\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{X}+\frac{k\sigma}{\sqrt{n}}$$

이다. 상수 k의 값을 구하여라. (단, $\mathrm{P}(|Z|\le2.33)=0.98$로 한다.)

4 표준편차가 1로 알려진 정규분포를 따르는 모집단의 평균에 대하여 신뢰도 α %의 신뢰구간을 표본평균을 이용하여 구하는데 신뢰구간의 길이를 2로 하려면 표본의 크기가 4이어야 한다. 신뢰구간의 길이를 1로 하려고 할 때, 필요한 표본의 크기를 구하여라.

정책에 대한 표본의 찬성률을 $\hat{p}$이라 놓는다.

5 어떤 정책에 대한 찬성률의 신뢰구간을 신뢰도 95 %로 추정하려고 한다. 신뢰구간의 길이를 8 % 이내로 하기 위한 표본의 크기의 범위를 구하여라. (단, $\mathrm{P}(|Z|\le2)=0.95$로 한다.)

읽기 자료

여론 조사란 무엇인가?

민주주의의 기본은 국민의 뜻에 따라 사회와 국가를 운영하는 것이다. 이때, 국민의 뜻을 객관적이고도 구체적으로 파악하는 것이 중요한데, 그 수단으로써 여론 조사가 많이 쓰인다.

영국의 정치학자인 브라이스(Bryce, J.)는 이미 19세기 말에, 민주주의의 발전에서 마지막 단계는 국민의 의지가 즉시 파악되는 것이라고 예견하였다. 오늘날은 통계적 기법의 발전, 정보 통신 기술의 발달, 시민 의식의 성숙 등에 힘입어 어떤 사건에 대한 여론 조사는 거의 순식간에, 매우 정확하게 이루어지고 있다. 투표의 종료 시각과 동시에 발표되는 당선자의 예측에서 이러한 사실을 확인할 수 있다. 이러한 면에서 볼 때, 우리 사회는 브라이스가 예견한 민주주의 발전의 마지막 단계에 이르렀다고 할 수 있다.

이와 같이 여론 조사는 처음에는 정치적 문제에서 출발하였으나 현재는 사회·과학 분야뿐만 아니라 기업 경영에서도 많이 활용되고 있다. 오늘날 소비자의 여론에 귀를 기울이지 않는 기업이 하나도 없다고 하여도 과언이 아니다.

여론 조사의 대부분은 표본조사로 이루어지는데, 그 과정을 살펴보면 다음과 같다.

조사의 목적과 모집단의 설정 → 표본설계 (표본추출 방법, 표본의 크기, 모수의 추정 방법, 설문 문항 작성) → 예비 조사 → 설문 문항 수정, 보완 → 조사원 확보, 교육 → 실제 조사 (면접, 전화) → 자료 분석 → 정책 반영

여론 조사의 결과는 정확해야 하고, 신뢰할 수 있어야 한다. 이러한 정확성과 신뢰성을 확보하기 위하여 여론 조사를 시행하고 그 결과를 발표할 때 다음 사항을 제시하여야 한다.

- 필수 사항: 조사 기관명, 조사 대상, 조사 시기, 유효 표본의 크기와 구체적인 조사 지역
- 권장 사항: 표본추출 방법, 조사 방법(면접, 전화, 인터넷 등), 설문지, 무응답자의 비율

우리나라의 대표적 여론 조사 기관 사이트 찾아보기

- http://www.gallup.co.kr
- http://www.kric.com

실생활 문제 해결하기

*수학적 개념을 실생활 문제에 적용해 보는 문제입니다.

인터넷 실명제 도입에 대한 찬성률

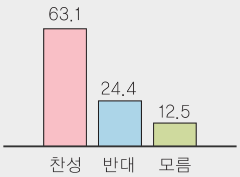
| 문제 | 오른쪽 기사는 인터넷 실명제 도입에 대한 여론 조사를 다룬 것이다. 인터넷 실명제 도입을 찬성하는 19세 이상 전체 국민의 모비율 p에 대하여 신뢰도 95 %인 신뢰구간을 추정하여라.

"인터넷 실명제 찬성" 63 %…"사이버 모욕죄 도입해야" 55 %

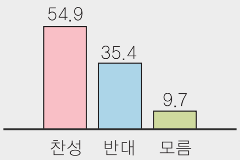
우리 국민 10명 중 6명 이상은 인터넷 실명제 도입을 찬성하는 것으로 나타났다. 논란을 빚고 있는 '사이버 모욕죄' 신설에 대해서도 절반 이상이 '도입해야 한다.'는 의견을 보였다.

인터넷 실명제 도입에 대한 여론 조사를 실시한 결과, 전체 응답자의 63.1 %가 인터넷 실명제를 도입해야 한다고 답했다. 반대 의견은 24.4 %에 불과했다.

인터넷 실명제 도입 견해(%)



사이버 모욕죄 도입 견해(%)



※여론 조사 개요

ㅇ조사 기간 : 2008년 9월 7~8일
ㅇ조사 대상 : 전국 19세 이상 성인 남녀 700명
ㅇ오차 범위 : 신뢰도 95 %, 오차 범위 ±3.7 %
ㅇ조사 의뢰 : ○○○

1단계_ 문제를 이해하여 보자.

(1) 표본의 크기를 구하여라.

(2) 인터넷 실명제 도입을 찬성하는 표본비율 $\hat{p}$의 값을 구하여라.

2단계_ 계획을 세워 보자.

표본의 크기를 n, 표본비율을 $\hat{p}$, $\hat{q}=1-\hat{p}$이라고 할 때, 모비율 p에 대하여 신뢰도 95 %인 신뢰구간을 말하여라.

3단계_ 문제를 해결하여 보자.

(1) 2단계의 신뢰구간에 $n=700$, $\hat{p}=0.631$, $\hat{q}=0.369$를 대입하여 신뢰구간을 구하여라.

(단, 소수 넷째 자리에서 반올림한다.)

(2) $1.96\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}} \le 1.96\sqrt{\dfrac{0.5\times0.5}{700}}$ 임을 확인하고 $1.96\sqrt{\dfrac{0.5\times0.5}{700}}\times100$ (%)의 값을 구하여라.

(단, 소수 둘째 자리에서 반올림한다.)

(3) 기사에 주어진 오차 범위 ±3.7 %를 사용하여 모비율 p에 대한 신뢰구간을 구하여라.

IV 대 단 원 확 인 하 기

계산

1 ★

제비뽑기를 이용하여 남자 4명, 여자 4명 중에서 3명의 대표를 뽑으려고 한다. 대표로 뽑히는 남자의 수를 확률변수 X라고 할 때, 다음 물음에 답하여라.

(1) 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내어라.

(2) 확률변수 X의 평균과 분산을 구하여라.

이해

2 ★★

확률변수 X의 확률밀도함수가 $f(x)=ax+1\ (0\le x\le 2)$일 때, 다음을 구하여라.

(1) 상수 a의 값　　(2) $\mathrm{P}\left(0\le X\le \frac{1}{2}\right)$

계산

3 ★

확률변수 X에 대하여 $\mathrm{E}(X)=20$, $\mathrm{V}(X)=4$일 때, 확률변수 $Y=2X-10$에 대하여 $\mathrm{E}(Y)$, $\mathrm{V}(Y)$, $\sigma(Y)$를 구하여라.

문제 해결

4 ★★

어느 버스 정류장에 도착하는 버스 중에서 10 %가 연착한다고 한다. 어느 날 이 정류장에 버스 20대가 도착할 때, 연착하는 버스가 1대 이하일 확률을 구하여라.

$\left(\text{단, } \left(\frac{9}{10}\right)^{19}=0.1351,\ \left(\frac{9}{10}\right)^{20}=0.1216\text{으로 한다.}\right)$

문제 해결

5 ★★

어느 공연에 예약한 사람이 사전 통보 없이 오지 않을 확률이 5 %라고 한다. 공연장의 좌석 수가 70일 때, 72명이 예약한 경우 좌석이 부족하게 될 확률을 구하여라.

(단, $0.95^{71}=0.0262$, $0.95^{72}=0.0249$로 한다.)

문제 해결

6 ★★

어떤 회사의 통신망을 이용하는 사람들의 접속 시간은 평균이 40분, 표준편차가 5분인 정규분포를 따른다고 한다. 이 통신망 이용자 중에서 10000명을 임의로 뽑을 때, 접속 시간이 50분을 넘는 사람의 수를 추측하여라.

이해

7 ★★

확률변수 X의 평균이 20, 표준편차가 4인 모집단에서 크기 8인 표본을 임의추출하였다. 표본평균을 $\overline{X}$라고 할 때, $\overline{X}^2$의 평균을 구하여라.

문제 해결

8 ★★★

어느 공장에서 생산하는 전구의 수명 시간은 평균이 1400시간, 표준편차가 100시간인 정규분포를 따른다고 한다. 이 전구 중에서 n개를 임의추출하여 그 표본평균을 $\overline{X}$라고 할 때, $\mathrm{P}\left(\overline{X} \geq 1350+\frac{165}{\sqrt{n}}\right) \geq 0.90$이 성립하는 n의 최솟값을 구하여라.

(단, $\mathrm{P}(0 \leq Z \leq 1.28)=0.4$로 한다.)

문제 해결

9 ★★

어느 제과점에서 만드는 샌드위치의 무게는 표준편차가 0.5 g인 정규분포를 따른다고 한다. 이 제과점에서 만든 샌드위치 중에서 25개를 임의추출하여 무게를 재었더니 표본평균이 32.2 g이었다. 다음 물음에 답하여라.

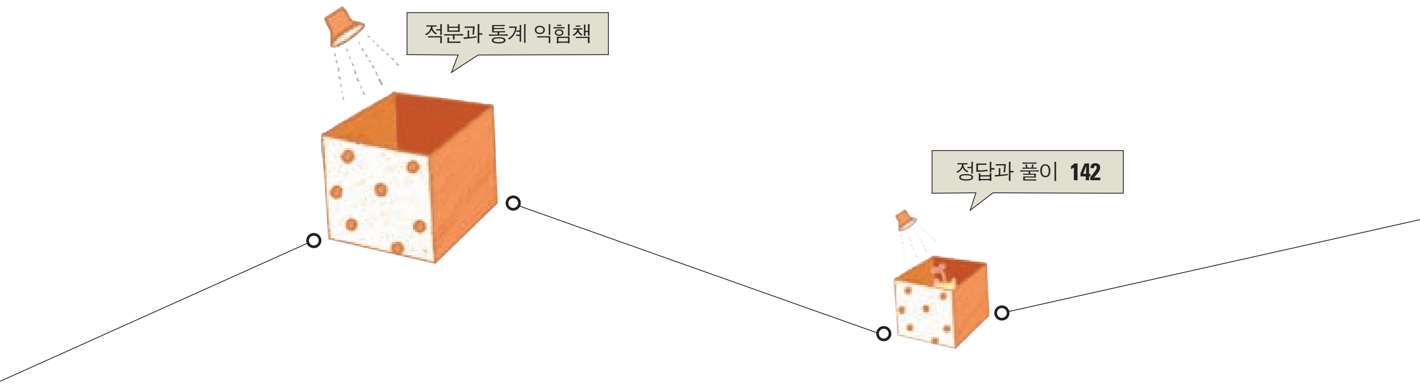
(1) 샌드위치의 무게의 평균에 대하여 신뢰도 95 %인 신뢰구간을 구하여라.

(2) 신뢰도 95 %인 신뢰구간의 길이를 0.2 g 이내로 하기 위한 표본의 크기의 최솟값을 구하여라.

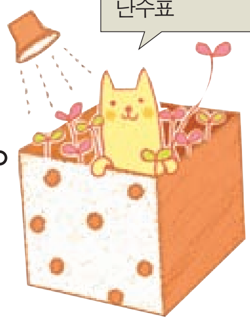
문제 해결

10 ★★★

어느 축구 경기의 시청률을 조사하기 위하여 표본조사를 하였더니 그 시간에 TV를 시청하고 있던 100명 중 20명이 축구 경기를 시청하였다. 시청률에 대하여 신뢰도 95 %인 신뢰구간을 구하여라.


적분과 통계 익힘책
정답과 풀이 142

부록



Ⅰ. 적분법

1. 부정적분

부정적분에 들어가기 전에 / P. 11

1 (1) $4x^2+12x+9$
(2) $4x^2-12x+9$
(3) x^2-1
(4) x^3+3x^2+3x+1
(5) $x^3-6x^2+12x-8$

2 (1) $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$에서 $\sin\alpha>0$
$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$이므로
$$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}$$
$$=\sqrt{1-\left(-\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{7}}{4}$$
$$\therefore \sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$=2\cdot\frac{\sqrt{7}}{4}\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)=-\frac{3\sqrt{7}}{8}$$
(2) $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$
$$=2\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)^2-1=\frac{1}{8}$$
(3) $\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}$
$$=\frac{1-\left(-\frac{3}{4}\right)}{2}=\frac{7}{8}$$
$\frac{\pi}{4}<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{2}$에서 $\sin\frac{\alpha}{2}>0$이므로
$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{7}{8}}=\frac{\sqrt{14}}{4}$$
(4) $\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}$
$$=\frac{1+\left(-\frac{3}{4}\right)}{2}=\frac{1}{8}$$
$\frac{\pi}{4}<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{2}$에서 $\cos\frac{\alpha}{2}>0$이므로
$$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1}{8}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

3 (1) $y'=2x$
(2) $y'=3x^2$
(3) $y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$
(4) $y'=-\frac{1}{x^2}$

4 (1) $y'=e^x(\sin x+\cos x)$
(2) $y'=10(x^2+1)^9(x^2+1)'=20x(x^2+1)^9$
(3) $y'=1000(x^2+1)^{999}(x^2+1)'=2000x(x^2+1)^{999}$

1. 부정적분의 뜻과 여러 가지 함수의 부정적분

바탕 다지기 / P. 13

| 스스로 하기 |

1 (1) 2, 2, 2, 2, $\frac{2}{3}$, $2x$
(2) 2, 6, $\frac{1}{2}$, 3

1 (1) $3x+C$
(2) $2x^4+C$
(3) $-2x^3+2x+C$
(4) $\int x\sqrt{x}\,dx$
$$=\int x^{\frac{3}{2}}dx=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+C$$
$$=\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+C$$
(5) $4\ln|x|+C$
(6) $-3\cos x+4\sin x+C$
(7) $\int e^{x+3}dx$
$$=\int e^x\cdot e^3dx=e^3\int e^xdx$$
$$=e^{x+3}+C$$
(8) $\int(2^x+x^2)dx$
$$=\int 2^xdx+\int x^2dx$$
$$=\frac{2^x}{\ln 2}+\frac{1}{3}x^3+C$$

기본 익히기 / P. 14

1 (1) $\int x^2(2x+7)dx+\int(x+5)(-2x^2+3x+1)dx$
$$=\int(2x^3+7x^2)dx$$

$$+\int(-2x^3-7x^2+16x+5)dx$$
$$=\int(16x+5)dx=8x^2+5x+C$$
(2) $\int\frac{x^3}{x-1}dx+\int\frac{1}{1-x}dx$
$$=\int\frac{x^3}{x-1}dx-\int\frac{1}{x-1}dx$$
$$=\int\frac{x^3-1}{x-1}dx=\int\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}dx$$
$$=\int(x^2+x+1)dx$$
$$=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+C$$
(3) $\int\frac{x^2+3x-2}{x^2}dx$
$$=\int\left(1+\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}\right)dx$$
$$=x+3\ln|x|+\frac{2}{x}+C$$
(4) $\int(\sin x+\cos x)^2dx+\int(\sin x-\cos x)^2dx$
$$=\int 2(\sin^2x+\cos^2x)dx$$
$$=\int 2\,dx=2x+C$$

2 (1) $f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3x^2\Delta x+5(\Delta x)^2}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}(3x^2+5\Delta x)=3x^2$$
(2) $f(x)=\int f'(x)dx$
$$=\int 3x^2dx=x^3+C$$
(3) $f(x)=x^3+C$에서 $f(0)=-1$이므로
$C=-1$
따라서 $f(x)=x^3-1$이므로
$f(-3)=(-3)^3-1=-28$

3 (1) $\int(\tan x+3)\cos x\,dx$
$$=\int\left(\frac{\sin x}{\cos x}+3\right)\cos x\,dx$$
$$=\int(\sin x+3\cos x)dx$$
$$=-\cos x+3\sin x+C$$
(2) $\tan^2x=\sec^2x-1$이므로
$$\int(x^2+\tan^2x)dx$$
$$=\int(x^2+\sec^2x-1)dx$$
$$=\frac{1}{3}x^3+\tan x-x+C$$
(3) $\int\frac{2xe^x+1}{x}dx$
$$=\int\left(2e^x+\frac{1}{x}\right)dx$$
$$=2e^x+\ln|x|+C$$
(4) $\int\frac{4^x-x^2}{2^x+x}dx$
$$=\int\frac{(2^x)^2-x^2}{2^x+x}dx$$
$$=\int\frac{(2^x+x)(2^x-x)}{2^x+x}dx$$
$$=\int(2^x-x)dx$$
$$=\frac{2^x}{\ln 2}-\frac{1}{2}x^2+C$$

4 $f'(x)=2x-3$이므로
$f(x)=\int(2x-3)dx=x^2-3x+C$
한편 $f(-1)=-2$이므로
$f(-1)=(-1)^2-3\cdot(-1)+C$
$\qquad=4+C=-2$
$\therefore C=-6$
따라서 구하는 곡선의 방정식은
$f(x)=x^2-3x-6$

실력 키우기 / P. 15

1 (1) $\int\left(x+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)dx$
$$=\int\left(x+2x^{-\frac{1}{2}}\right)dx$$
$$=\frac{1}{2}x^2+2\cdot 2x^{\frac{1}{2}}+C$$
$$=\frac{1}{2}x^2+4\sqrt{x}+C$$
(2) $\int\frac{(\sqrt{x}-2)^3}{x}dx$
$$=\int\frac{x\sqrt{x}-6x+12\sqrt{x}-8}{x}dx$$
$$=\int\left(\sqrt{x}-6+\frac{12}{\sqrt{x}}-\frac{8}{x}\right)dx$$

$=\frac{2}{3}x\sqrt{x}-6x+24\sqrt{x}-8\ln|x|+C$

(3) $x^4+x^2+1=(x^2+x+1)(x^2-x+1)$이므로

$\int\frac{x^4+x^2+1}{x^2+x+1}dx$

$=\int\frac{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}{x^2+x+1}dx$

$=\int(x^2-x+1)dx$

$=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x+C$

(4) $\int\frac{x^4}{x-1}dx+\int\frac{1}{1-x}dx$

$=\int\frac{x^4}{x-1}dx-\int\frac{1}{x-1}dx=\int\frac{x^4-1}{x-1}dx$

$=\int\frac{(x-1)(x^3+x^2+x+1)}{x-1}dx$

$=\int(x^3+x^2+x+1)dx$

$=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+C$

2 (1) $\int\frac{\sin^2x-\cos^2x}{\sin^2x\,\cos^2x}dx$

$=\int\left(\frac{1}{\cos^2x}-\frac{1}{\sin^2x}\right)dx$

$=\int(\sec^2x-\operatorname{cosec}^2x)dx$

$=\tan x+\cot x+C$

(2) $\int(\tan x+\cot x)^2dx$

$=\int(\tan^2x+2+\cot^2x)dx$

$=\int\{(\tan^2x+1)+(\cot^2x+1)\}dx$

$=\int(\sec^2x+\operatorname{cosec}^2x)dx$

$=\tan x-\cot x+C$

(3) $\int\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}dx$

$=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}\int\left(\frac{1}{2}\right)^{x}dx$

$=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{x}}{\ln\frac{1}{2}}+C=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}}{\ln\frac{1}{2}}+C$

$=-\frac{1}{\ln 2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}+C$

(4) $\int\frac{8^x+1}{2^x+1}dx$

$=\int\frac{(2^x)^3+1}{2^x+1}dx=\int\frac{(2^x+1)(4^x-2^x+1)}{2^x+1}dx$

$=\int(4^x-2^x+1)dx$

$=\frac{4^x}{\ln 4}-\frac{2^x}{\ln 2}+x+C$

$=\frac{4^x}{2\ln 2}-\frac{2^x}{\ln 2}+x+C$

3 (1) $f(x)+g(x)=\int\{f(x)+g(x)\}'dx$

$=\int(2x+1)dx$

$=x^2+x+C$

$f(0)+g(0)=C=1$이므로

$f(x)+g(x)=x^2+x+1$

(2) $f(x)g(x)=\int\{f(x)g(x)\}'dx$

$=\int(3x^2-2x+2)dx$

$=x^3-x^2+2x+C$

$f(0)g(0)=C=-2$이므로

$f(x)g(x)=x^3-x^2+2x-2$

4 (1) $F'(x)=f(x)$이므로

$\{f(x)$의 차수$\}=\{F(x)$의 차수$\}-1$

그러므로 주어진 식에서 $F(x)$의 차수는 3이다.

이때, $f(x)$는 이차식이므로

$f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$

로 놓으면

$F(x)=\int(ax^2+bx+c)dx$

$=\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+cx+C$

$F(x)=f(x)+x^3$이므로

$\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+cx+C=x^3+ax^2+bx+c$

양변의 계수를 비교하면 $a=3, b=6, c=6$

$\therefore f(x)=3x^2+6x+6$

(2) $f(x)$의 최고차항을 ax^n ($a\neq 0$, n은 자연수)이라고 하면 주어진 $F(x)$의 최고차항은

$\frac{a}{n+1}x^{n+1}$

주어진 등식에서 양변의 최고차항은 각각

$\frac{3a}{n+1}x^{n+1}$, ax^{n+1}

이때, 최고차항의 계수가 같아야 하므로

$\dfrac{3a}{n+1}=a \qquad \therefore n=2$

따라서 $f(x)$는 이차식이므로

$f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq0)$

로 놓으면 $f(0)=1$에서 $\quad c=1$

즉, $f(x)=ax^2+bx+1\ (a\neq0)$이므로

$F(x)=\int(ax^2+bx+1)dx$

$\quad=\dfrac{a}{3}x^3+\dfrac{b}{2}x^2+x+C$

$3F(x)=xf(x)-f(x)$이므로

$ax^3+\dfrac{3b}{2}x^2+3x+3C$

$=ax^3+(b-a)x^2+(1-b)x-1$

양변의 계수를 비교하면 $\quad a=1,\ b=-2$

$\therefore f(x)=x^2-2x+1$

5 $f'(x)=1\ (x<-1)$이면

$f(x)=\int 1\,dx$

$\quad=x+C_1\ (x<-1)$

$f'(x)=2x\ (-1<x<1)$이면

$f(x)=\int 2x\,dx$

$\quad=x^2+C_2\ (-1<x<1)$

$f'(x)=-1\ (x>1)$이면

$f(x)=\int(-1)dx$

$\quad=-x+C_3\ (x>1)$

$f(x)$는 원점을 지나므로

$f(0)=C_2=0$

$\therefore f(x)=x^2\ (-1<x<1)$

$y=f(x)$가 연속이려면

$f(-1)=-1+C_1=(-1)^2$

$\therefore C_1=2$

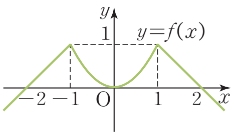
$f(1)=-1+C_3=1^2$

$\therefore C_3=2$

따라서 연속함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} x+2 & (x<-1) \\ x^2 & (-1\le x<1) \\ -x+2 & (x\ge1)\end{cases}$$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



2. 치환적분법과 부분적분법

바탕 다지기 / P. 17

| 스스로 하기 |

1 (1) $\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{21},\ \dfrac{1}{21}(3x-4)^7$

(2) $\sin x,\ \sin x,\ \cos x$

1 (1) $3x-1=t$로 놓으면 $x=\dfrac{t+1}{3}$이므로

$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{3}$

$\therefore \int\cos(3x-1)dx$

$\quad=\int\cos t\cdot\dfrac{1}{3}dt=\dfrac{1}{3}\sin t+C$

$\quad=\dfrac{1}{3}\sin(3x-1)+C$

(2) $\ln x=t$로 놓으면

$\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{dx}{dt}=1$

$\therefore \int\dfrac{\ln x}{x}dx=\int t\,dt$

$\quad=\dfrac{1}{2}t^2+C=\dfrac{1}{2}(\ln x)^2+C$

(3) $f(x)=\ln x,\ g'(x)=2x$로 놓으면

$f'(x)=\dfrac{1}{x},\ g(x)=x^2$이므로

$\int 2x\ln x\,dx$

$=x^2\ln x-\int x^2\cdot\dfrac{1}{x}dx$

$=x^2\ln x-\dfrac{1}{2}x^2+C$

(4) $f(x)=4x,\ g'(x)=e^x$으로 놓으면

$f'(x)=4,\ g(x)=e^x$이므로

$\int 4xe^x\,dx=4xe^x-\int 4e^x dx$

$\quad=4xe^x-4e^x+C=4e^x(x-1)+C$

기본 익히기 / P. 19

1 (1) $\int\dfrac{1}{x(x+1)}dx$

$=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)dx$

$=\ln|x|-\ln|x+1|+C$

(2) $\sqrt{x+2}=t$로 놓으면 $x=t^2-2$이므로

$\frac{dx}{dt}=2t$

$\therefore \int\frac{x}{\sqrt{x+2}}dx$

$=\int\frac{t^2-2}{t}\cdot 2t\,dt=\int(2t^2-4)dt$

$=\frac{2}{3}t^3-4t+C=\frac{2}{3}t(t^2-6)+C$

$=\frac{2}{3}(x-4)\sqrt{x+2}+C$

(3) $3x-2=t$로 놓으면 $x=\frac{t+2}{3}$이므로

$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{3}$

$\therefore \int 3x(3x-2)^5dx$

$=\int(t+2)t^5\cdot\frac{1}{3}\,dt=\frac{1}{3}\int(t^6+2t^5)dt$

$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{7}t^7+\frac{1}{3}t^6\right)+C$

$=\frac{1}{21}(3x-2)^7+\frac{1}{9}(3x-2)^6+C$

$=\frac{1}{63}(3x-2)^6\,(9x+1)+C$

(4) $-x^2=t$로 놓으면 $\quad -2x\frac{dx}{dt}=1$

$\therefore \int 2xe^{-x^2}dx=-\int e^t dt$

$=-e^t+C$

$=-e^{-x^2}+C$

(5) $x^2-x+1=t$로 놓으면 $\quad (2x-1)\frac{dx}{dt}=1$

$\therefore \int\frac{2x-1}{x^2-x+1}dx$

$=\int\frac{1}{t}dt=\ln|t|+C$

$=\ln|x^2-x+1|+C$

$=\ln(x^2-x+1)+C$

(6) $1+\ln x=t$로 놓으면 $\quad \frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{dt}=1$

$\therefore \int\frac{1+\ln x}{x}\,dx$

$=\int t\,dt=\frac{1}{2}t^2+C$

$=\frac{1}{2}(1+\ln x)^2+C$

2 (1) $f(x)=8x,\ g'(x)=e^{2x+1}$으로 놓으면

$f'(x)=8,\ g(x)=\frac{1}{2}e^{2x+1}$이므로

$\int 8xe^{2x+1}dx$

$=8x\cdot\frac{1}{2}e^{2x+1}-\int 8\cdot\frac{1}{2}e^{2x+1}dx$

$=4xe^{2x+1}-\int 4e^{2x+1}dx$

$=4xe^{2x+1}-2e^{2x+1}+C$

$=2e^{2x+1}(2x-1)+C$

(2) $f(x)=x+1,\ g'(x)=\sin x$로 놓으면

$f'(x)=1,\ g(x)=-\cos x$이므로

$\int(x+1)\sin x\,dx$

$=(x+1)(-\cos x)-\int(-\cos x)dx$

$=-(x+1)\cos x+\sin x+C$

(3) $f(x)=\ln x,\ g'(x)=16x^3$으로 놓으면

$f'(x)=\frac{1}{x},\ g(x)=4x^4$이므로

$\int 16x^3\ln x\,dx$

$=4x^4\ln x-\int 4x^4\cdot\frac{1}{x}dx$

$=4x^4\ln x-\int 4x^3dx$

$=4x^4\ln x-x^4+C$

3 $1-\cos x=t$로 놓으면 $\quad \sin x\frac{dx}{dt}=1$

$\therefore f(x)=\int(1-\cos x)^2\sin x\,dx$

$=\int t^2dt=\frac{1}{3}t^3+C$

$=\frac{1}{3}(1-\cos x)^3+C$

이때, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$이므로

$\frac{1}{3}\left(1-\cos\frac{\pi}{2}\right)^3+C=0 \qquad \therefore C=-\frac{1}{3}$

따라서 $f(x)=\frac{1}{3}(1-\cos x)^3-\frac{1}{3}$이므로

$f(\pi)=\frac{1}{3}\cdot 2^3-\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$

4 $f'(x)=\dfrac{x-1}{x+1}=1-\dfrac{2}{x+1}$이므로

$$f(x)=\int\left(1-\frac{2}{x+1}\right)dx$$
$$=x-2\ln|x+1|+C$$

이때, $f(0)=2$이므로

$0-2\ln 1+C=2 \qquad \therefore C=2$

따라서 $f(x)=x-2\ln|x+1|+2$이므로

$$f(e-1)=(e-1)-2\ln e+2$$
$$=e-1$$

5 $f'(x)=xe^x-2x+1$이므로

$$f(x)=\int(xe^x-2x+1)dx$$
$$=xe^x-\int e^x dx-x^2+x$$
$$=(x-1)e^x-x^2+x+C$$

이때, $f(0)=1$이므로

$-1+C=1 \qquad \therefore C=2$

따라서 $f(x)=(x-1)e^x-x^2+x+2$이므로

$f(2)=e^2$

실력 키우기 / P. 20

1 (1) $\sin x=t$로 놓으면 $\qquad \cos x\dfrac{dx}{dt}=1$

$$\therefore \int \sin^4 x\cos x\,dx$$
$$=\int t^4 dt=\frac{1}{5}t^5+C$$
$$=\frac{1}{5}\sin^5 x+C$$

(2) $e^x+1=t$로 놓으면 $\qquad e^x\dfrac{dx}{dt}=1$

$$\therefore \int\frac{1}{e^x+1}dx$$
$$=\int\frac{e^x}{e^x(e^x+1)}dx=\int\frac{1}{(t-1)t}dt$$
$$=\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t}\right)dt$$
$$=\ln|t-1|-\ln|t|+C$$
$$=\ln e^x-\ln(e^x+1)+C$$
$$=x-\ln(e^x+1)+C$$

(3) $\displaystyle\int\frac{1+\sin x}{\cos x}dx$

$$=\int\frac{1-\sin^2 x}{(1-\sin x)\cos x}dx$$
$$=\int\frac{\cos x}{1-\sin x}dx$$

$1-\sin x=t$로 놓으면 $\qquad -\cos x\dfrac{dx}{dt}=1$

$\therefore$ (주어진 식)

$$=\int\frac{\cos x}{1-\sin x}dx$$
$$=-\int\frac{1}{t}dt=-\ln|t|+C$$
$$=-\ln|1-\sin x|+C$$
$$=-\ln(1-\sin x)+C$$

(4) $\displaystyle\int\frac{2}{\cos x}dx=\int\frac{2\cos x}{\cos^2 x}dx$

$$=\int\frac{2\cos x}{1-\sin^2 x}dx$$

$\sin x=t$로 놓으면 $\qquad \cos x\dfrac{dx}{dt}=1$

$\therefore$ (주어진 식)

$$=\int\frac{2\cos x}{1-\sin^2 x}dx=\int\frac{2}{1-t^2}dt$$
$$=-\int\frac{2}{(t-1)(t+1)}dt$$
$$=-\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt$$
$$=-\ln|t-1|+\ln|t+1|+C$$
$$=-\ln(1-\sin x)+\ln(\sin x+1)+C$$

2 (1) $\displaystyle\int 4x^2e^{2x-1}dx$

$$=4x^2\cdot\frac{1}{2}e^{2x-1}-\int 8x\cdot\frac{1}{2}e^{2x-1}dx$$
$$=2x^2e^{2x-1}-\int 4xe^{2x-1}dx$$
$$=2x^2e^{2x-1}-\left\{4x\cdot\frac{1}{2}e^{2x-1}-\int 4\cdot\frac{1}{2}e^{2x-1}dx\right\}$$
$$=2x^2e^{2x-1}-2xe^{2x-1}+2\int e^{2x-1}dx$$
$$=2x^2e^{2x-1}-2xe^{2x-1}+e^{2x-1}+C$$
$$=(2x^2-2x+1)e^{2x-1}+C$$

(2) $\int(x^2+1)\sin x\,dx$

$=(x^2+1)(-\cos x)-\int 2x(-\cos x)dx$

$=-(x^2+1)\cos x+\int 2x\cos x\,dx$

$=-(x^2+1)\cos x+2x\sin x-\int 2\sin x\,dx$

$=-(x^2+1)\cos x+2x\sin x+2\cos x+C$

$=-(x^2-1)\cos x+2x\sin x+C$

(3) $\int 2(\ln x)^2dx$

$=2x(\ln x)^2-\int 2x\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{x}dx$

$=2x(\ln x)^2-\int 4\ln x\,dx$

$=2x(\ln x)^2-\left\{4x\ln x-\int 4x\cdot\frac{1}{x}dx\right\}$

$=2x(\ln x)^2-4x\ln x+4x+C$

3 $f(x)+g(x)$

$=\int\{f(x)+g(x)\}'dx=\int(x^2+2x+2)e^x\,dx$

$=(x^2+2x+2)e^x-\int(2x+2)e^x\,dx$

$=(x^2+2x+2)e^x-\left\{(2x+2)e^x-\int 2e^x\,dx\right\}$

$=x^2e^x+\int 2e^x\,dx$

$=(x^2+2)e^x+C_1$

이때, $f(0)=g(0)=1$이므로

$f(0)+g(0)=2+C_1=2$

$\therefore C_1=0$

$\therefore f(x)+g(x)=(x^2+2)e^x$

$f(x)g(x)$

$=\int\{f(x)g(x)\}'dx$

$=\int(2x^3+3x^2+2)e^{2x}\,dx$

$=(2x^3+3x^2+2)\cdot\frac{1}{2}e^{2x}-\int(6x^2+6x)\cdot\frac{1}{2}e^{2x}\,dx$

$=\frac{1}{2}(2x^3+3x^2+2)e^{2x}-\int(3x^2+3x)e^{2x}\,dx$

$=\frac{1}{2}(2x^3+3x^2+2)e^{2x}$

$-\left\{(3x^2+3x)\cdot\frac{1}{2}e^{2x}-\int(6x+3)\cdot\frac{1}{2}e^{2x}dx\right\}$

$=\frac{1}{2}(2x^3-3x+2)e^{2x}+\frac{1}{2}\int(6x+3)e^{2x}dx$

$=\left(x^3-\frac{3}{2}x+1\right)e^{2x}$

$+\left\{\frac{1}{4}(6x+3)e^{2x}-\frac{1}{2}\int 6\cdot\frac{1}{2}e^{2x}dx\right\}$

$=\left(x^3-\frac{3}{2}x+1+\frac{3}{2}x+\frac{3}{4}\right)e^{2x}-\frac{3}{4}e^{2x}+C_2$

$=(x^3+1)e^{2x}+C_2$

이때, $f(0)=g(0)=1$이므로

$f(0)g(0)=1+C_2=1$

$\therefore C_2=0$

$\therefore f(x)g(x)=(x^3+1)e^{2x}$

$=(x+1)(x^2-x+1)e^{2x}$

$f'(0)=2$이므로

$f(x)=(x+1)e^x,\ g(x)=(x^2-x+1)e^x$

4 $I_n=\int e^xx^n\,dx=e^xx^n-\int nx^{n-1}e^x\,dx$

$=e^xx^n-nI_{n-1}$

5 (1) 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$F'(x)=f(x)$이므로

$f(x)=f(x)+xf'(x)-2x\sin x-x^2\cos x$

$xf'(x)=2x\sin x+x^2\cos x$

$x>0$이므로

$f'(x)=2\sin x+x\cos x$

(2) $f(x)=\int(2\sin x+x\cos x)dx$

$=-2\cos x+x\sin x-\int\sin x\,dx$

$=-2\cos x+x\sin x+\cos x+C$

$=x\sin x-\cos x+C$ $\cdots\cdots$ ㉠

$F\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$이므로

$\frac{\pi}{2}f\left(\frac{\pi}{2}\right)-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\sin\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$

이 등식의 양변을 $\frac{\pi}{2}$로 나누면

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)-\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}=1$

$\therefore f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}+1$

이때, ㉠에서 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}+C$이므로

$C=1$

$\therefore f(x)=x\sin x-\cos x+1$

2. 정적분

정적분에 들어가기 전에 / P. 23

1 $x=1$을 주어진 식에 대입하면

$1^3-2\cdot 1^2+4\cdot 1+1=1-2+4+1=4$

2 (1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2+n+1}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2(n^2+n+1)}=\frac{1}{2}$

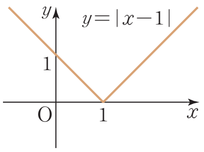
(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3+n}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6(n^3+n)}=\frac{1}{3}$

3 (1) $y=|x-1|$에서

(i) $x\geq 1$일 때, $y=x-1$

(ii) $x<1$일 때, $y=-x+1$



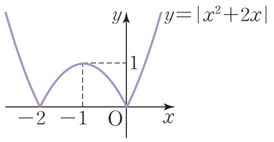
(2) $y=|x^2+2x|$에서

(i) $x\leq -2$ 또는 $x\geq 0$일 때

$y=x^2+2x$

(ii) $-2<x<0$일 때

$y=-x^2-2x$



4 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$에서 $\sin\theta>0$, $\cos\theta>0$, $\tan\theta>0$이므로

$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{4}{5}$

$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{4}{3}$

$\cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}=\frac{3}{4}$

$\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}=\frac{5}{3}$

$\mathrm{cosec}\,\theta=\frac{1}{\sin\theta}=\frac{5}{4}$

1. 정적분의 뜻과 성질

바탕 다지기 / P. 25

| 스스로 하기 |

1 (1) $\frac{3}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}$ (2) $\frac{1}{4}$, π

1 (1) $\displaystyle\int_{-3}^{3}(x^2-2x+3)dx$

$\displaystyle=\left[\frac{1}{3}x^3-x^2+3x\right]_{-3}^{3}$

$=(9-9+9)-(-9-9-9)=36$

(2) $\displaystyle\int_{1}^{3}(2y-1)dy$

$=\left[y^2-y\right]_{1}^{3}$

$=(9-3)-(1-1)=6$

(3) $\displaystyle\int_{1}^{2}\frac{1}{y}dy$

$=\left[\ln|y|\right]_{1}^{2}$

$=\ln 2-\ln 1=\ln 2$

(4) $\displaystyle\int_{1}^{4}\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$

$\displaystyle=\int_{1}^{4}\left(1-x^{-\frac{1}{2}}\right)dx$

$=\left[x-2\sqrt{x}\right]_{1}^{4}$

$=(4-4)-(1-2)=1$

(5) $\displaystyle\int_{0}^{\pi}\pi\sin x\,dx$

$=\pi\left[-\cos x\right]_{0}^{\pi}$

$=\pi(-\cos\pi+\cos 0)=2\pi$

(6) $\displaystyle\int_{0}^{1}(e^x+x)dx$

$\displaystyle=\left[e^x+\frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{1}$

$\displaystyle=\left(e+\frac{1}{2}\right)-1=e-\frac{1}{2}$

(7) $\displaystyle\int_{0}^{2}x(x-2)dx+\int_{2}^{4}x(x-2)dx$

$\displaystyle=\int_{0}^{4}x(x-2)dx=\int_{0}^{4}(x^2-2x)dx$

$\displaystyle=\left[\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{0}^{4}$

$$=\frac{64}{3}-16=\frac{16}{3}$$

(8) $\int_1^2 (x^3-5x^2+7x+8)dx$

$$-\int_1^2 (x^3-2x^2+3x-2)dx$$

$$=\int_1^2 (-3x^2+4x+10)dx$$

$$=\Big[-x^3+2x^2+10x\Big]_1^2$$

$$=(-8+8+20)-(-1+2+10)=9$$

개념 넓히기 / P. 26

확 인 학 습

1 $\int_{-2}^2 (6x^5+2x^3+4x^2-1)dx$

$$=\int_{-2}^2 (6x^5+2x^3)dx+\int_{-2}^2 (4x^2-1)dx$$

$$=0+2\int_0^2 (4x^2-1)dx$$

$$=2\Big[\frac{4}{3}x^3-x\Big]_0^2=\frac{52}{3}$$

기본 익히기 / P. 27

1 (1) $\int_0^1 \frac{1}{x^2-2x-3}dx$

$$=\int_0^1 \frac{1}{(x-3)(x+1)}dx$$

$$=\int_0^1 \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$=\Big[\frac{1}{4}\ln|x-3|-\frac{1}{4}\ln|x+1|\Big]_0^1=-\frac{1}{4}\ln 3$$

(2) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2 dx$

$$=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\left(1+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)dx$$

$$=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}(1+\sin x)dx$$

$$=\Big[x-\cos x\Big]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}=\frac{2}{3}\pi+\frac{3}{2}$$

(3) $\int_0^{\ln 3}\frac{e^{3x}}{e^x-1}dx+\int_{\ln 3}^0 \frac{1}{e^y-1}dy$

$$=\int_0^{\ln 3}\frac{e^{3x}}{e^x-1}dx-\int_0^{\ln 3}\frac{1}{e^x-1}dx$$

$$=\int_0^{\ln 3}\frac{e^{3x}-1}{e^x-1}dx$$

$$=\int_0^{\ln 3}\frac{(e^x-1)(e^{2x}+e^x+1)}{e^x-1}dx$$

$$=\int_0^{\ln 3}(e^{2x}+e^x+1)dx$$

$$=\Big[\frac{1}{2}e^{2x}+e^x+x\Big]_0^{\ln 3}=6+\ln 3$$

(4) $\int_{-1}^2 (x^2-3x)dx+\int_4^3 x(3-x)dx$

$$-\int_3^2 x(x-3)dx$$

$$=\int_{-1}^2 (x^2-3x)dx+\int_3^4 (x^2-3x)dx$$

$$+\int_2^3 (x^2-3x)dx$$

$$=\int_{-1}^2 (x^2-3x)dx+\int_2^4 (x^2-3x)dx$$

$$=\int_{-1}^4 (x^2-3x)dx$$

$$=\Big[\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2\Big]_{-1}^4=-\frac{5}{6}$$

(5) $\int_{-1}^5 (2e^x+5)dx+\int_5^{-1}(e^x+4)dx$

$$-\int_2^5 (e^x+1)dx$$

$$=\int_{-1}^5 (2e^x+5)dx-\int_{-1}^5 (e^x+4)dx$$

$$-\int_2^5 (e^x+1)dx$$

$$=\int_{-1}^5 (e^x+1)dx-\int_2^5 (e^x+1)dx$$

$$=\int_{-1}^5 (e^x+1)dx+\int_5^2 (e^x+1)dx$$

$$=\int_{-1}^2 (e^x+1)dx$$

$$=\Big[e^x+x\Big]_{-1}^2=e^2-\frac{1}{e}+3$$

2 (1) $\frac{d}{dx}\int_{-2}^x (3t^2-4t-5)dt=3x^2-4x-5$

(2) $\frac{d}{dx}\int_2^x (t-2)(t+3)dt=(x-2)(x+3)$

3 $\int_1^2 (4x^3-ax+1)dx$

$$=\Big[x^4-\frac{a}{2}x^2+x\Big]_1^2$$

$$=16-\frac{3}{2}a=0$$

$$\therefore a=\frac{32}{3}$$

4 (1) $\int_{-1}^{1} f(x)dx$

$=\int_{-1}^{1}(x^2+1)dx=2\int_{0}^{1}(x^2+1)dx$

$=2\left[\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^1=\frac{8}{3}$

(2) $\int_{0}^{2} f(x)dx$

$=\int_{0}^{1} f(x)dx+\int_{1}^{2} f(x)dx$

$=\int_{0}^{1}(x^2+1)dx+\int_{1}^{2}(-x^2+3x)dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^1+\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_1^2=\frac{7}{2}$

5 (1) $f(x)=|x-2|$로 놓으면

$f(x)=\begin{cases} x-2 & (x\geq 2) \\ -x+2 & (x\leq 2)\end{cases}$

이므로

$\int_{1}^{3}|x-2|dx$

$=\int_{1}^{2}(-x+2)dx+\int_{2}^{3}(x-2)dx$

$=\left[-\frac{1}{2}x^2+2x\right]_1^2+\left[\frac{1}{2}x^2-2x\right]_2^3=1$

(2) $f(x)=|x^2-x-2|$로 놓으면

$f(x)=\begin{cases} x^2-x-2 & (x\leq -1 \text{ 또는 } x\geq 2) \\ -x^2+x+2 & (-1\leq x\leq 2)\end{cases}$

이므로

$\int_{-2}^{3}|x^2-x-2|dx$

$=\int_{-2}^{-1}(x^2-x-2)dx+\int_{-1}^{2}(-x^2+x+2)dx$

$+\int_{2}^{3}(x^2-x-2)dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x\right]_{-2}^{-1}$

$+\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{-1}^{2}$

$+\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x\right]_2^3=\frac{49}{6}$

(3) $f(x)=|\cos x|$로 놓으면

$f(x)=\begin{cases} \cos x & \left(0\leq x\leq \frac{\pi}{2}\right) \\ -\cos x & \left(\frac{\pi}{2}\leq x\leq \pi\right)\end{cases}$

이므로

$\int_{0}^{\pi}|\cos x|dx$

$=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-\cos x)dx$

$=\left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\left[\sin x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=2$

(4) $f(x)=|e^x-1|$로 놓으면

$f(x)=\begin{cases} e^x-1 & (x\geq 0) \\ -e^x+1 & (x\leq 0)\end{cases}$

이므로

$\int_{-1}^{1}|e^x-1|dx$

$=\int_{-1}^{0}(-e^x+1)dx+\int_{0}^{1}(e^x-1)dx$

$=\left[-e^x+x\right]_{-1}^{0}+\left[e^x-x\right]_0^1=e+\frac{1}{e}-2$

개념 넓히기 / P. 28

확인학습

1 (1) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}\right)$

$=\int_{0}^{1}\sin\pi x\,dx$

$\left(-\frac{1}{\pi}\cos\pi x\right)'=\sin\pi x$이므로

$\int_{0}^{1}\sin\pi x\,dx$

$=\left[-\frac{1}{\pi}\cos\pi x\right]_0^1=\frac{2}{\pi}$

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{n+k}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\frac{k}{n}}\right)$

$=\int_{0}^{1}\sqrt{1+x}\,dx$

$\left\{\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\right\}'=\sqrt{1+x}$이므로

$\int_{0}^{1}\sqrt{1+x}\,dx$

$=\left[\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$

실력 키우기 / P. 29

1 (1) $x=a$를 대입하면

$\int_{a}^{a} f(t)dt=a^2-2a-3=0$

$(a+1)(a-3)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=3$

이때, $a>0$이므로 $\quad a=3$

주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=2x-2$

(2) $x=a$를 대입하면

$$\int_a^a f(t+1)dt=a^3+a^2-2a=0$$

$a(a+2)(a-1)=0$

$\therefore a=-2$ 또는 $a=0$ 또는 $a=1$

이때, $a>0$이므로 $\quad a=1$

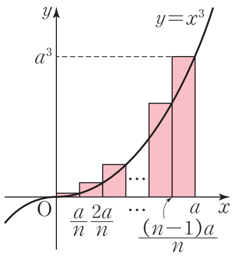
주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f(x+1)=3x^2+2x-1$$
$$=(3x-1)(x+1)$$

$$\therefore f(x)=\{3(x-1)-1\}x$$
$$=x(3x-4)$$

2 (1) 다음 그림과 같이 구간 $[0,\ a]$를 n등분하면 양 끝점과 각 분점의 x좌표는 차례로

$$0,\ \frac{a}{n},\ \frac{2a}{n},\ \cdots,\ \frac{(n-1)a}{n},\ \frac{na}{n}(=a)$$



이때의 y좌표는 차례로

$$0,\ \left(\frac{a}{n}\right)^3,\ \left(\frac{2a}{n}\right)^3,\ \cdots,\ \left\{\frac{(n-1)a}{n}\right\}^3,\ \left(\frac{na}{n}\right)^3$$

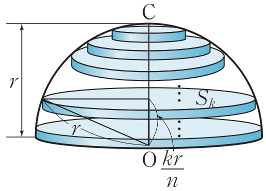
k번째 직사각형의 넓이는 $\frac{a}{n}\left(\frac{ka}{n}\right)^3$이므로 위의 그림의 색칠한 부분의 넓이를 S_n이라고 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{a}{n}\left(\frac{ka}{n}\right)^3=\frac{a^4}{n^4}\sum_{k=1}^{n}k^3$$
$$=\frac{a^4}{n^4}\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$$
$$=\frac{a^4}{n^2}\cdot\frac{(n+1)^2}{4}$$

따라서 구하는 넓이 S는

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n$$
$$=a^4\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\cdot\frac{(n+1)^2}{4}=\frac{1}{4}a^4$$

(2) 다음 그림과 같이 반구의 반지름 OC를 n등분하자. 이때, 이 분점을 지나고 반지름 OC에 수직인 평면으로 잘라서 $(n-1)$개의 원기둥을 만든다.



각 분점을 밑에서부터 차례로 $C_1,\ C_2,\ \cdots,\ C_k,\ \cdots,\ C_{n-1}$이라고 하면 아래에서 k번째 원기둥의 밑면의 반지름의 길이는

$$\sqrt{r^2-\left(\frac{kr}{n}\right)^2}=r\sqrt{1-\frac{k^2}{n^2}}$$

k번째 원기둥의 밑넓이를 S_k라고 하면

$$S_k=\pi\left(r\sqrt{1-\frac{k^2}{n^2}}\right)^2=\pi r^2\left(1-\frac{k^2}{n^2}\right)$$

높이가 $\frac{r}{n}$인 $(n-1)$개의 원기둥의 부피의 합을 V_n이라고 하면

$$V_n=\sum_{k=1}^{n-1}\pi r^2\left(1-\frac{k^2}{n^2}\right)\frac{r}{n}=\frac{\pi r^3}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{k^2}{n^2}\right)$$
$$=\frac{\pi r^3}{n}\left\{(n-1)-\frac{1}{n^2}\cdot\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\right\}$$
$$=\pi r^3\left\{\left(1-\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)\right\}$$

따라서 구하는 반구의 부피 V는

$$V=\lim_{n\to\infty}V_n$$
$$=\lim_{n\to\infty}\pi r^3\left\{\left(1-\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)\right\}$$
$$=\pi r^3\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3}\pi r^3$$

3 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}f(t)\cos t\,dt$는 상수이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}f(t)\cos t\,dt=a \qquad \cdots\cdots ㉠$$

로 놓으면

$f(x)=\sin x-a$

이를 ㉠에 대입하면

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sin t-a)\cos t\,dt=a$$

이 등식의 좌변을 정리하면

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sin t-a)\cos t\,dt$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sin t\cos t-a\cos t)dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{2}\sin 2t-a\cos t\right)dt$$

$$=\left[-\frac{1}{4}\cos 2t-a\sin t\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{2}}{2}a$$

즉, $\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{2}}{2}a=a$이므로

$$\frac{\sqrt{2}+2}{2}a=\frac{1}{4}$$

$$a=\frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

$$\therefore\ f(x)=\sin x-\frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

4 $g(x)=|e^x-e^a|$으로 놓으면

$$g(x)=\begin{cases} e^x-e^a & (x\geq a) \\ -e^x+e^a & (x\leq a)\end{cases}$$

이므로

$$f(a)=\int_0^1|e^x-e^a|dx$$

$$=\int_0^a(-e^x+e^a)dx+\int_a^1(e^x-e^a)dx$$

$$=\Big[-e^x+e^ax\Big]_0^a+\Big[e^x-e^ax\Big]_a^1$$

$$=(2a-3)e^a+e+1$$

양변을 a에 대하여 미분하면

$$f'(a)=2e^a+(2a-3)e^a$$

$$=(2a-1)e^a$$

$f'(a)=0$에서 $\quad a=\frac{1}{2}$

$a=\frac{1}{2}$에서 $f(x)$의 값은 극소이면서 최소가 된다.

따라서 $f(x)$가 최소가 되게 하는 a의 값은 $\frac{1}{2}$이다.

5 (1) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{3k}{n}\right)^3\frac{2}{n}$

$$=2\int_0^1(1+3x)^3\,dx$$

$\left\{\frac{1}{12}(1+3x)^4\right\}'=(1+3x)^3$이므로

$$2\int_0^1(1+3x)^3\,dx$$

$$=2\left[\frac{1}{12}(1+3x)^4\right]_0^1=\frac{85}{2}$$

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{(1^2+2^2+\cdots+n^2)(1^3+2^3+\cdots+n^3)}{(1+2+\cdots+n)(1^4+2^4+\cdots+n^4)}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3}\cdot\frac{1^3+2^3+\cdots+n^3}{n^4}}{\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}\cdot\frac{1^4+2^4+\cdots+n^4}{n^5}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left\{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}\right\}\left\{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^3\cdot\frac{1}{n}\right\}}{\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\cdot\frac{1}{n}\right\}\left\{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^4\cdot\frac{1}{n}\right\}}$$

$$=\frac{\int_0^1x^2\,dx\cdot\int_0^1x^3\,dx}{\int_0^1x\,dx\cdot\int_0^1x^4\,dx}$$

$$=\frac{\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1\cdot\left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^1}{\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1\cdot\left[\frac{1}{5}x^5\right]_0^1}$$

$$=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}}=\frac{5}{6}$$

2. 정적분의 치환적분법과 부분적분법

바탕 다지기 / P. 32

| 스스로 하기 |

1 (1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{12}$

(2) $\frac{3}{4}e^4+\frac{1}{4}$

1 (1) $3x+2=t$로 놓으면 $x=\frac{t-2}{3}$이므로

$$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{3}$$

$x=0$일 때 $t=2$, $x=1$일 때 $t=5$이므로

$$\int_0^1e^{3x+2}dx$$

$$=\int_2^5e^t\cdot\frac{1}{3}dt=\left[\frac{1}{3}e^t\right]_2^5=\frac{1}{3}(e^5-e^2)$$

(2) $e^x+1=t$로 놓으면 $\quad e^x\frac{dx}{dt}=1$

$x=0$일 때 $t=2$, $x=1$일 때 $t=e+1$이므로

$$\int_0^1\frac{e^x}{e^x+1}dx$$

$$=\int_2^{e+1}\frac{1}{t}dt=\Big[\ln|t|\Big]_2^{e+1}$$

$=\ln(e+1)-\ln 2=\ln\dfrac{e+1}{2}$

(3) $f(x)=x+1,\ g'(x)=\cos x$로 놓으면

$f'(x)=1,\ g(x)=\sin x$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x+1)\cos x\,dx$$

$$=\Big[(x+1)\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx$$

$$=\left(\frac{\pi}{2}+1\right)-\Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}$$

(4) $f(x)=x,\ g'(x)=\sin x$로 놓으면

$f'(x)=1,\ g(x)=-\cos x$이므로

$$\int_{2\pi}^{3\pi}x\sin x\,dx$$

$$=\Big[x(-\cos x)\Big]_{2\pi}^{3\pi}-\int_{2\pi}^{3\pi}(-\cos x)dx$$

$$=3\pi-(-2\pi)+\Big[\sin x\Big]_{2\pi}^{3\pi}=5\pi$$

기본 익히기 / P. 33

1 $2x+1=t$로 놓으면 $x=\dfrac{t-1}{2}$이므로

$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{2}$

$x=-\dfrac{1}{2}$일 때 $t=0$, $x=\dfrac{1}{2}$일 때 $t=2$이므로

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}f(2x+1)dx$$

$$=\int_0^2 f(t)\cdot\frac{1}{2}dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^2 f(t)dt=\frac{1}{2}\cdot 12=6$$

2 (1) $\cos x=t$로 놓으면 $\quad -\sin x\dfrac{dx}{dt}=1$

$x=0$일 때 $t=1$, $x=\pi$일 때 $t=-1$이므로

$$\int_0^{\pi}(1-\cos^2 x)\sin x\,dx$$

$$=\int_1^{-1}(1-t^2)(-dt)$$

$$=\int_{-1}^{1}(1-t^2)dt=2\int_0^1(1-t^2)dt$$

$$=2\Big[t-\frac{1}{3}t^3\Big]_0^1=\frac{4}{3}$$

(2) $\ln x=t$로 놓으면 $\quad \dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{dx}{dt}=1$

$x=e$일 때 $t=1$, $x=e^2$일 때 $t=2$이므로

$$\int_e^{e^2}\frac{3(\ln x)^2}{x}dx$$

$$=\int_1^2 3t^2\,dt=\Big[t^3\Big]_1^2=7$$

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 x\,dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\cos x\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2 x)\cos x\,dx$$

$\sin x=t$로 놓으면 $\quad \cos x\dfrac{dx}{dt}=1$

$x=0$일 때 $t=0$, $x=\dfrac{\pi}{2}$일 때 $t=1$이므로

(주어진 식)

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2 x)\cos x\,dx$$

$$=\int_0^1(1-t^2)dt$$

$$=\Big[t-\frac{1}{3}t^3\Big]_0^1=\frac{2}{3}$$

(4) $e^x+1=t$로 놓으면 $\quad e^x\dfrac{dx}{dt}=1$

$x=0$일 때 $t=2$, $x=1$일 때 $t=e+1$이므로

$$\int_0^1\frac{1}{e^x+1}dx$$

$$=\int_0^1\frac{e^x}{e^x(e^x+1)}dx$$

$$=\int_2^{e+1}\frac{1}{(t-1)t}dt=\int_2^{e+1}\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t}\right)dt$$

$$=\Big[\ln|t-1|-\ln|t|\Big]_2^{e+1}=\ln\frac{2e}{e+1}$$

3 (1) $\displaystyle\int_0^1 x^2e^{-x}\,dx$

$$=\Big[-x^2e^{-x}\Big]_0^1+\int_0^1 2xe^{-x}\,dx$$

$$=-\frac{1}{e}+\Big[-2xe^{-x}\Big]_0^1+\int_0^1 2e^{-x}dx$$

$$=-\frac{1}{e}+\left(-\frac{2}{e}\right)+\Big[-2e^{-x}\Big]_0^1=2-\frac{5}{e}$$

(2) $\displaystyle\int_1^e\frac{\ln x}{x^2}dx$

$$=\Big[-\frac{1}{x}\ln x\Big]_1^e-\int_1^e\left(-\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{x}dx$$

$$=-\frac{1}{e}-\Big[\frac{1}{x}\Big]_1^e=1-\frac{2}{e}$$

(3) $\int_{-1}^{1}|x|e^x\,dx$

$=\int_{-1}^{0}(-x)e^x\,dx+\int_{0}^{1}xe^x\,dx$

$=\Big[-xe^x\Big]_{-1}^{0}-\int_{-1}^{0}(-1)e^x\,dx+\Big[xe^x\Big]_{0}^{1}$

$-\int_{0}^{1}e^x\,dx$

$=-\frac{1}{e}+\Big[e^x\Big]_{-1}^{0}+e-\Big[e^x\Big]_{0}^{1}=2-\frac{2}{e}$

4 ㄱ. $I_1=\int_0^1 xe^x\,dx$

$=\Big[xe^x\Big]_0^1-\int_0^1 e^x\,dx$

$=e-\Big[e^x\Big]_0^1=1$

$I_2=\int_0^1 x^2e^x\,dx$

$=\Big[x^2e^x\Big]_0^1-\int_0^1 2xe^x\,dx$

$=e-\Big[2xe^x\Big]_0^1+\int_0^1 2e^x\,dx$

$=e-2e+\Big[2e^x\Big]_0^1=e-2$

$\therefore I_1>I_2$ (참)

ㄴ. $I_n=\int_0^1 x^ne^x\,dx$

$=\Big[x^ne^x\Big]_0^1-\int_0^1 nx^{n-1}e^x\,dx$

$=e-nI_{n-1}$

$\therefore nI_{n-1}+I_n=e$ (거짓)

ㄷ. ㄴ에 의하여

$I_4=e-4I_3$

$I_3=e-3I_2=e-3(e-2)$

$=-2e+6$

$\therefore I_4=e-4(-2e+6)=9e-24$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

5 $f(t)=\int_0^{t-1}(x-t)e^x\,dx$

$=\Big[(x-t)e^x\Big]_0^{t-1}-\int_0^{t-1}e^x\,dx$

$=-e^{t-1}+t-\Big[e^x\Big]_0^{t-1}$

$=-2e^{t-1}+t+1$

양변을 t에 대하여 미분하면

$f'(t)=-2e^{t-1}+1$

$f'(t)=0$에서

$t=1-\ln 2$

$t=1-\ln 2$에서 함수 $f(t)$의 값은 극대이면서 최대가 되므로 최댓값은

$f(1-\ln 2)=-2e^{-\ln 2}+1-\ln 2+1=1-\ln 2$

개념 넓히기 / P. 34

확인학습

1 (1) $x=\sin\theta\left(-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$로 놓으면

$\frac{dx}{d\theta}=\cos\theta$

$x=-1$일 때 $\theta=-\frac{\pi}{2}$, $x=1$일 때 $\theta=\frac{\pi}{2}$이므로

$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx$

$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos^2\theta}\cdot\cos\theta\,d\theta$

$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta$

$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta$

$=\Big[\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}$

(2) $x=\tan\theta\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$로 놓으면

$\frac{dx}{d\theta}=\sec^2\theta$

$x=0$일 때 $\theta=0$, $x=1$일 때 $\theta=\frac{\pi}{4}$이므로

$\int_0^1\frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{(1+\tan^2\theta)^2}\cdot\sec^2\theta\,d\theta$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sec^4\theta}\cdot\sec^2\theta\,d\theta$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta$

$=\Big[\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}$

실력 키우기 / P. 35

1 $2x+1=t$로 놓으면 $x=\dfrac{t-1}{2}$이므로

$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{2}$

$x=0$일 때 $t=1$, $x=1$일 때 $t=3$이므로

$$\int_0^1 f(2x+1)dx=\int_1^3 f(t)\cdot\frac{1}{2}dt$$
$$=\frac{1}{2}\int_1^3 f(t)dt$$

이때, $f(x)=\begin{cases} 1 & (0\le x\le 1) \\ 2x-1 & (1\le x\le 2) \\ 3 & (2\le x\le 3) \\ -3x+12 & (3\le x\le 4) \end{cases}$이므로

(주어진 식)

$$=\frac{1}{2}\int_1^3 f(t)dt$$
$$=\frac{1}{2}\int_1^3 f(x)dx$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\int_1^2 (2x-1)dx+\int_2^3 3\,dx\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\Big[x^2-x\Big]_1^2+\frac{1}{2}\Big[3x\Big]_2^3=\frac{5}{2}$$

| **다른 풀이** |

주어진 그래프에서 1부터 3까지의 넓이는 5이므로

$$\int_0^1 f(2x+1)dx=\frac{1}{2}\int_1^3 f(t)dt=\frac{5}{2}$$

2 (1) $a-x=t$로 놓으면 $x=a-t$이므로

$\dfrac{dx}{dt}=-1$

$x=0$일 때 $t=a$, $x=a$일 때 $t=0$이므로

$$\int_0^a f(a-x)dx$$
$$=\int_a^0 f(t)(-dt)$$
$$=\int_0^a f(t)dt$$
$$=\int_0^a f(x)dx$$

(2) (1)의 성질을 이용하면

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos x+\sin x}dx$$

즉, 다음이 성립한다.

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos x+\sin x}dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x}dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx$$
$$=\Big[x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}$$
$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx=\frac{\pi}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\pi}{4}$$

3 (1) $\displaystyle\int_0^1 (1+x)\sqrt{1-x^2}\,dx$

$$=\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx+\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx$$

(i) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$에서 $x=\sin\theta\left(-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$로 놓으면

$\dfrac{dx}{d\theta}=\cos\theta$

$x=0$일 때 $\theta=0$, $x=1$일 때 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$이므로

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2\theta}\cdot\cos\theta\,d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\,d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta$$
$$=\left[\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$$

(ii) $\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx$에서 $1-x^2=t$로 놓으면

$$-2x\frac{dx}{dt}=1$$

$x=0$일 때 $t=1$, $x=1$일 때 $t=0$이므로

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx$$
$$=\int_1^0 \sqrt{t}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)dt$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{t}\,dt$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{1}{3}$$

(i), (ii)에 의하여

$$\int_0^1 (1+x)\sqrt{1-x^2}\,dx$$
$$=\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx+\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx$$
$$=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{3}$$

(2) $x=\tan\theta\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$로 놓으면

$$\frac{dx}{d\theta}=\sec^2\theta$$

$x=0$일 때 $\theta=0$, $x=1$일 때 $\theta=\frac{\pi}{4}$이므로

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}\cdot\sec^2\theta\,d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sec\theta}\cdot\sec^2\theta\,d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos\theta}{\cos^2\theta}d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos\theta}{1-\sin^2\theta}d\theta$$

$\sin\theta=t$로 놓으면 $\quad \cos\theta\frac{d\theta}{dt}=1$

$\theta=0$일 때 $t=0$, $\theta=\frac{\pi}{4}$일 때 $t=\frac{\sqrt{2}}{2}$이므로

(주어진 식)

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos\theta}{1-\sin^2\theta}d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{1-t^2}\,dt$$
$$=-\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{(t-1)(t+1)}dt$$
$$=-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt$$
$$=-\frac{1}{2}\Big[\ln|t-1|-\ln|t+1|\Big]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$
$$=-\frac{1}{2}\ln(3-2\sqrt{2})$$

4 (1) $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\sin^{n-1}x\,dx$$
$$=\Big[-\cos x\sin^{n-1}x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\cos x)(n-1)\sin^{n-2}x\cos x\,dx$$
$$=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x(1-\sin^2 x)dx$$
$$=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\,dx$$
$$-(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$$
$$=(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n$$
$$\therefore I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}\ (n\ge3)$$

(2) $I_5=\frac{4}{5}I_3$

$$=\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}I_1=\frac{8}{15}I_1$$

$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=1$이므로

$$I_5=\frac{8}{15}I_1=\frac{8}{15}$$

(3) $I_6=\frac{5}{6}I_4$

$$=\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}I_2=\frac{5}{8}I_2$$

$I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,dx=\frac{\pi}{4}$이므로

$$I_6=\frac{5}{8}I_2=\frac{5}{32}\pi$$

5 (1) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+k^2}$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n}}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}\cdot\frac{1}{n}$$
$$=\int_0^1\frac{x}{1+x^2}dx$$

$1+x^2=t$로 놓으면 $\quad 2x\frac{dx}{dt}=1$

$x=0$일 때 $t=1$, $x=1$일 때 $t=2$이므로

(주어진 식)

$$=\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx$$

$$=\int_1^2 \frac{1}{t}\cdot\frac{1}{2}dt=\frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{t}dt$$

$$=\frac{1}{2}\Big[\ln|t|\Big]_1^2=\frac{1}{2}\ln 2$$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\{\sqrt{n^2-1^2}+2\sqrt{n^2-2^2}+\cdots+(n-1)\sqrt{n^2-(n-1)^2}\}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n-1}k\sqrt{n^2-k^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{n}\sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2}\cdot\frac{1}{n}$$

$$=\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$1-x^2=t$로 놓으면 $\quad -2x\dfrac{dx}{dt}=1$

$x=0$일 때 $t=1$, $x=1$일 때 $t=0$이므로

(주어진 식)

$$=\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$=\int_1^0 \sqrt{t}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\sqrt{t}\,dt$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{1}{3}$$

3. 정적분의 활용

정적분의 활용에 들어가기 전에 / P. 37

1 (1) $x^2=x+2$에서

$x^2-x-2=0$

$(x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

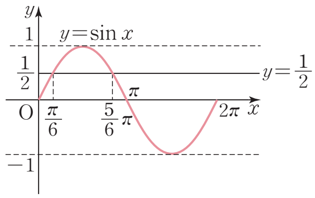
(2) $x^2+2x=3$에서

$x^2+2x-3=0$

$(x+3)(x-1)=0$

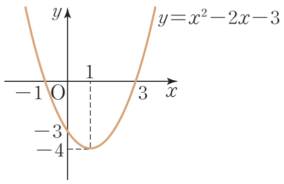
$\therefore x=-3$ 또는 $x=1$

(3) $\sin x=\dfrac{1}{2}\,(0\le x\le 2\pi)$에서

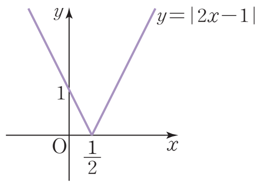


$x=\dfrac{\pi}{6}$ 또는 $x=\dfrac{5}{6}\pi$

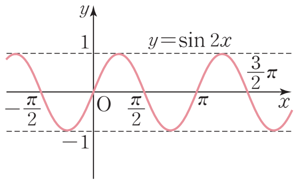
2 (1)



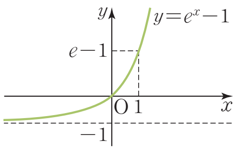
(2)



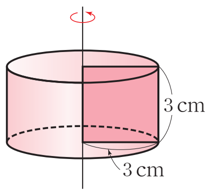
(3)



(4)



3 원기둥의 밑넓이를 S라고 하면



$S=\pi\cdot 3^2=9\pi\ (\text{cm}^2)$

따라서 구하는 부피 V는

$V=9\pi\times 3$

$\quad =27\pi\ (\text{cm}^3)$

4 시각 t에서의 점 P의 속도를 $v(t)$라고 하면

$$v(t)=\frac{dx}{dt}=3t^2-4t+5$$

따라서 시각 $t=2$에서의 속도는

$v(2)=9$

또 시각 t에서의 점 P의 가속도를 $a(t)$라고 하면

$$a(t)=\frac{dv}{dt}=6t-4$$

따라서 시각 $t=2$에서의 가속도는

$a(2)=8$

1. 도형의 넓이

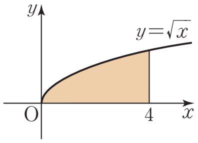
바탕 다지기 / P. 39

| 스스로 하기 |

1 $2,\ 2,\ \dfrac{9}{2}$

2 $2,\ 2,\ 9$

1 (1) 곡선 $y=\sqrt{x}$와 x축 및 직선 $x=4$로 둘러싸인 도형은 다음 그림과 같다.

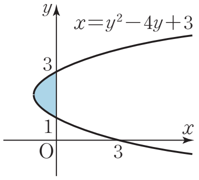


구간 $[0,\ 4]$에서 $y\geq 0$이므로 구하는 넓이 S는

$$S=\int_0^4 \sqrt{x}\,dx$$
$$=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^4=\frac{16}{3}$$

(2) 곡선 $x=y^2-4y+3$과 y축의 교점의 y좌표는 $y^2-4y+3=0$에서

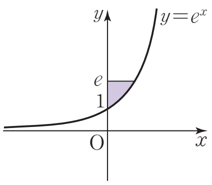
$y=1,\ y=3$



y축의 구간 $[1,\ 3]$에서 $x\leq 0$이므로 구하는 넓이 S는

$$S=\int_1^3 |y^2-4y+3|\,dy$$
$$=\int_1^3 (-y^2+4y-3)\,dy$$
$$=\left[-\frac{1}{3}y^3+2y^2-3y\right]_1^3$$
$$=\frac{4}{3}$$

2 $y=e^x$의 그래프는 다음 그림과 같다.



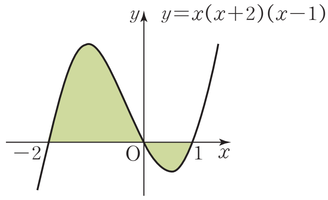
y축의 구간 $[1,\ e]$에서 $x\geq 0$이고, $y=e^x$에서 $x=\ln y$이므로 구하는 넓이 S는

$$S=\int_1^e \ln y\,dy=\Big[y\ln y\Big]_1^e-\int_1^e y\cdot\frac{1}{y}\,dy$$
$$=e-\Big[y\Big]_1^e=1$$

기본 익히기 / P. 40

1 (1) 곡선 $y=x(x+2)(x-1)$과 x축의 교점의 x좌표는 $x(x+2)(x-1)=0$에서

$x=-2,\ x=0,\ x=1$

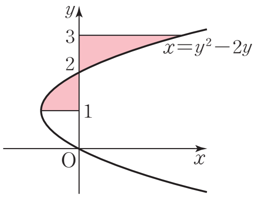


구간 $[-2,\ 0]$에서 $y\geq 0$이고, 구간 $[0,\ 1]$에서 $y\leq 0$이므로 구하는 넓이 S는

$$S=\int_{-2}^1 |x(x+2)(x-1)|\,dx$$
$$=\int_{-2}^0 x(x+2)(x-1)\,dx$$
$$+\int_0^1 \{-x(x+2)(x-1)\}\,dx$$
$$=\int_{-2}^0 (x^3+x^2-2x)\,dx$$
$$+\int_0^1 (-x^3-x^2+2x)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{-2}^0$$
$$+\left[-\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_0^1$$
$$=\frac{37}{12}$$

(2) 곡선 $x=y^2-2y$와 y축의 교점의 y좌표는 $y^2-2y=0$에서

$y=0,\ y=2$



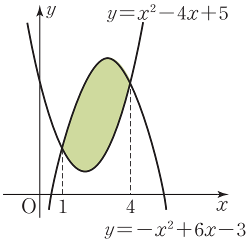
y축의 구간 $[1,\ 2]$에서 $y\leq 0$이고, y축의 구간

$[2,\ 3]$에서 $y \ge 0$이므로 구하는 넓이 S는

$$S=\int_1^3 |y^2-2y|\,dy$$
$$=\int_1^2(-y^2+2y)dy+\int_2^3(y^2-2y)dy$$
$$=\left[-\frac{1}{3}y^3+y^2\right]_1^2+\left[\frac{1}{3}y^3-y^2\right]_2^3$$
$$=2$$

2 (1) 두 곡선 $y=x^2-4x+5$, $y=-x^2+6x-3$의 교점의 x좌표는 $x^2-4x+5=-x^2+6x-3$에서

$x=1$, $x=4$



구간 $[1,\ 4]$에서 $-x^2+6x-3 \ge x^2-4x+5$이므로 구하는 넓이 S는

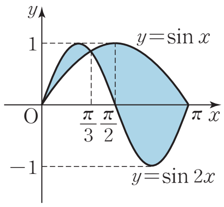
$$S=\int_1^4 |(-x^2+6x-3)-(x^2-4x+5)|\,dx$$
$$=\int_1^4(-2x^2+10x-8)dx$$
$$=\left[-\frac{2}{3}x^3+5x^2-8x\right]_1^4$$
$$=9$$

(2) $0 \le x \le \pi$에서 두 곡선 $y=\sin x$, $y=\sin 2x$의 교점의 x좌표는 $\sin x=\sin 2x$에서

$\sin x=2\sin x\cos x$

$\sin x(1-2\cos x)=0$

$x=0$, $x=\frac{\pi}{3}$, $x=\pi$



구간 $\left[0,\ \frac{\pi}{3}\right]$에서 $\sin x \le \sin 2x$이고,

구간 $\left[\frac{\pi}{3},\ \pi\right]$에서 $\sin 2x \le \sin x$이므로 구하는 넓이 S는

$$S=\int_0^{\pi}|\sin x-\sin 2x|\,dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\sin 2x-\sin x)dx$$
$$+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}(\sin x-\sin 2x)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{2}\cos 2x+\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$
$$+\left[-\cos x+\frac{1}{2}\cos 2x\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}$$
$$=\frac{5}{2}$$

3 곡선 $y=ax^3$과 직선 $y=1$의 교점의 x좌표는 $ax^3=1$에서

$$x=\frac{1}{\sqrt[3]{a}}$$
$$S_1=\int_0^{\frac{1}{\sqrt[3]{a}}} ax^3\,dx+\left(1-\frac{1}{\sqrt[3]{a}}\right)\cdot 1$$
$$=\left[\frac{a}{4}x^4\right]_0^{\frac{1}{\sqrt[3]{a}}}+\left(1-\frac{1}{\sqrt[3]{a}}\right)$$
$$=1-\frac{3}{4\sqrt[3]{a}}$$

이때, 두 부분 S_1, S_2의 넓이가 같아야 하므로

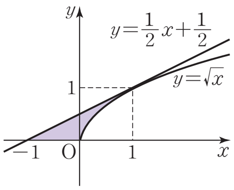
$$S_1=\frac{1}{2}$$

즉, $1-\frac{3}{4\sqrt[3]{a}}=\frac{1}{2}$이므로

$$\sqrt[3]{a}=\frac{3}{2}$$
$$\therefore a=\frac{27}{8}$$

4 $y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$이므로 곡선 $y=\sqrt{x}$ 위의 점 $(1,\ 1)$에서의 접선의 방정식은

$$y-1=\frac{1}{2}(x-1) \qquad \therefore y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$$



따라서 구하는 도형의 넓이 S는

$$S=\int_{-1}^1\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)dx-\int_0^1\sqrt{x}\,dx$$

$=\left[\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x\right]_{-1}^{1}-\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_{0}^{1}$

$=\frac{1}{3}$

5 포물선의 방정식을 $y=ax^2+6$으로 놓으면 이 포물선은 $(4,\ 0)$을 지나므로

$16a+6=0$

$\therefore a=-\frac{3}{8}$

따라서 색칠한 부분의 넓이 S는

$S=7\times10-\int_{-4}^{4}\left(-\frac{3}{8}x^2+6\right)dx$

$=70-2\int_{0}^{4}\left(-\frac{3}{8}x^2+6\right)dx$

$=70-2\left[-\frac{1}{8}x^3+6x\right]_{0}^{4}$

$=38\ (\mathrm{m}^2)$

개념 넓히기 / P. 41

확 인 학 습

1 $\int_{\alpha}^{\beta}(x^2-2x-1)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$

이때, $\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=-1$이므로

$\beta-\alpha=\sqrt{(\beta+\alpha)^2-4\alpha\beta}$

$=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}$

$\therefore$ (주어진 식)

$=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$

$=-\frac{1}{6}\times(2\sqrt{2})^3$

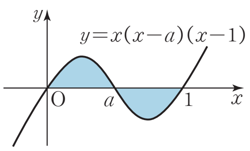
$=-\frac{1}{6}\times16\sqrt{2}$

$=-\frac{8\sqrt{2}}{3}$

실력 키우기 / P. 42

1 (1) $0<a<1$에서 곡선 $y=x(x-a)(x-1)$과 x축의 교점의 x좌표는 $x(x-a)(x-1)=0$에서

$x=0,\ x=a,\ x=1$



구간 $[0,\ a]$에서 $y\geq0$이고 구간 $[a,\ 1]$에서 $y\leq0$이므로 구하는 넓이 $S(a)$는

$S(a)=\int_{0}^{1}|x(x-a)(x-1)|dx$

$=\int_{0}^{a}x(x-a)(x-1)dx$

$+\int_{a}^{1}\{-x(x-a)(x-1)\}dx$

$=\int_{0}^{a}\{x^3-(a+1)x^2+ax\}dx$

$+\int_{a}^{1}\{-x^3+(a+1)x^2-ax\}dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{a+1}{3}x^3+\frac{a}{2}x^2\right]_{0}^{a}$

$+\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{a+1}{3}x^3-\frac{a}{2}x^2\right]_{a}^{1}$

$=-\frac{a^4}{6}+\frac{a^3}{3}-\frac{a}{6}+\frac{1}{12}$

(2) $\int_{0}^{a}y\,dx=\int_{a}^{1}(-y)\,dx$이므로

$\int_{0}^{a}y\,dx+\int_{a}^{1}y\,dx=0$

즉, $\int_{0}^{1}y\,dx=0$이므로

$\int_{0}^{1}y\,dx$

$=\int_{0}^{1}x(x-a)(x-1)dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{a+1}{3}x^3+\frac{a}{2}x^2\right]_{0}^{1}$

$=\frac{a}{6}-\frac{1}{12}=0$

$\therefore a=\frac{1}{2}$

2 $y'=\frac{1}{x}$이므로 곡선 $y=\ln x$ 위의 점 $(t,\ \ln t)$에서의 접선의 방정식은

$y-\ln t=\frac{1}{t}(x-t)$

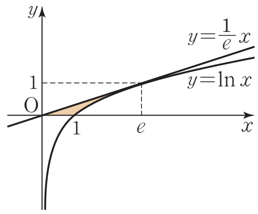
이 접선은 원점을 지나므로

$-\ln t=\frac{1}{t}(-t)$

$\therefore t=e$

접선의 방정식은

$y=\frac{1}{e}x$

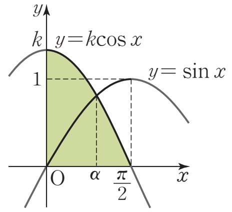


따라서 구하는 도형의 넓이 S는

$$S=\frac{1}{2}\cdot e\cdot 1-\int_1^e \ln x\,dx$$
$$=\frac{e}{2}-\Big[x\ln x\Big]_1^e+\Big[x\Big]_1^e$$
$$=\frac{e}{2}-1$$

3 두 곡선 $y=k\cos x$, $y=\sin x\left(0\le x\le\frac{\pi}{2}\right)$의 교점의 x좌표를 α라고 하면

$k\cos\alpha=\sin\alpha$



$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} k\cos x\,dx=\Big[k\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=k\text{이므로}$$
$$\int_0^{\alpha}(k\cos x-\sin x)dx=\frac{k}{2}$$
$$\int_0^{\alpha}(k\cos x-\sin x)dx$$
$$=\Big[k\sin x+\cos x\Big]_0^{\alpha}$$
$$=k\sin\alpha+\cos\alpha-1$$
$$=\frac{k}{2}$$

$k\cos\alpha=\sin\alpha$에서 $\tan\alpha=k$

$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$이므로

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+k^2}},\ \sin\alpha=\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}$$
$$\therefore k\sin\alpha+\cos\alpha-1$$
$$=k\cdot\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}-1$$
$$=\frac{k^2+1}{\sqrt{1+k^2}}-1$$
$$=\sqrt{k^2+1}-1=\frac{k}{2}$$
$$\sqrt{k^2+1}=1+\frac{k}{2}$$
$$k^2+1=1+k+\frac{k^2}{4}$$
$$\therefore k=\frac{4}{3}\ (\because k>0)$$

4 곡선 $y=\cos x$와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표를 α라고 하면

$k=\cos\alpha$

두 부분 S_1, S_2의 넓이의 합을 $f(\alpha)$라고 하면

$$f(\alpha)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\cos x-k|dx$$
$$=\int_0^{\alpha}(\cos x-k)dx+\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}(k-\cos x)dx$$
$$=\Big[\sin x-kx\Big]_0^{\alpha}+\Big[kx-\sin x\Big]_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\sin\alpha-k\alpha+\frac{\pi}{2}k-1-(k\alpha-\sin\alpha)$$
$$=2\sin\alpha-2\alpha\cos\alpha+\frac{\pi}{2}\cos\alpha-1$$
$$(\because k=\cos\alpha)$$

이때, 양변을 α에 대하여 미분하면

$$f'(\alpha)=2\cos\alpha-2\cos\alpha+2\alpha\sin\alpha-\frac{\pi}{2}\sin\alpha$$
$$=\left(2\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\sin\alpha$$

$f'(\alpha)=0$에서

$\alpha=\frac{\pi}{4}$, $\alpha=0$

이때, 두 부분 S_1, S_2의 넓이의 합 $f(\alpha)$는 $\alpha=\frac{\pi}{4}$일 때 극소이면서 최소이므로

$$k=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

5 방정식 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$에 x 대신 $-x$를 대입하면

$$\frac{(-x)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$
$$\therefore \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

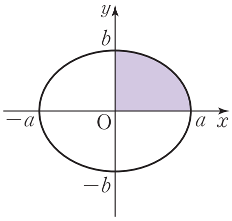
즉, 주어진 곡선은 y축에 대하여 대칭이다.

또 y 대신 $-y$를 대입하면

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(-y)^2}{b^2}=1$$
$$\therefore \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

즉, 주어진 곡선은 x축에 대하여 대칭이다.

따라서 구하는 접시의 면적 S는 $x\ge0$, $y\ge0$ 부분의 넓이의 4배이다.



$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$에서 $y=\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$

$S=4\displaystyle\int_0^a \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$

$\quad=\dfrac{4b}{a}\displaystyle\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$

이때, $\displaystyle\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$는 원 $x^2+y^2=a^2$의 넓이의 $\dfrac{1}{4}$과 같으므로

$S=\dfrac{4b}{a}\times\dfrac{\pi a^2}{4}$

$\quad=ab\pi$

2. 도형의 부피

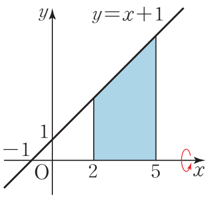
바탕 다지기 / P. 44

| 스스로 하기 |

1 (1) $\dfrac{1}{5}x^5-\dfrac{2}{3}x^3+x,\ \dfrac{16}{15}\pi$

(2) $\dfrac{1}{2}y^2+y,\ \dfrac{\pi}{2}$

1 (1)



구하는 회전체의 부피 V_x는

$V_x=\pi\displaystyle\int_2^5 y^2dx$

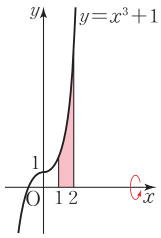
$\quad=\pi\displaystyle\int_2^5 (x+1)^2dx$

$\quad=\pi\displaystyle\int_2^5 (x^2+2x+1)dx$

$\quad=\pi\Big[\dfrac{1}{3}x^3+x^2+x\Big]_2^5$

$\quad=63\pi$

(2)



구하는 회전체의 부피 V_x는

$V_x=\pi\displaystyle\int_1^2 y^2dx$

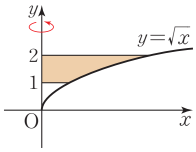
$\quad=\pi\displaystyle\int_1^2 (x^3+1)^2\,dx$

$\quad=\pi\displaystyle\int_1^2 (x^6+2x^3+1)dx$

$\quad=\pi\Big[\dfrac{1}{7}x^7+\dfrac{1}{2}x^4+x\Big]_1^2$

$\quad=\dfrac{373}{14}\pi$

2



$y=\sqrt{x}$에서 $x=y^2$이므로 구하는 회전체의 부피 V_y는

$V_y=\pi\displaystyle\int_1^2 x^2dy$

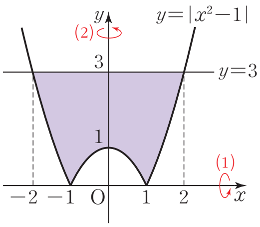
$\quad=\pi\displaystyle\int_1^2 (y^2)^2dy$

$\quad=\pi\Big[\dfrac{1}{5}y^5\Big]_1^2$

$\quad=\dfrac{31}{5}\pi$

기본 익히기 / P. 45

1



(1) 곡선 $y=|x^2-1|$과 직선 $y=3$의 교점의 x좌표는

$x=-2,\ x=2$

따라서 구하는 회전체의 부피 V_x는

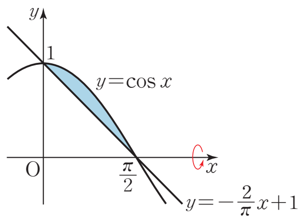
$$V_x=\pi\int_{-2}^{2}3^2\,dx-\pi\int_{-2}^{2}|x^2-1|^2\,dx$$
$$=2\pi\int_0^2(-x^4+2x^2+8)dx$$
$$=2\pi\left[-\frac{1}{5}x^5+\frac{2}{3}x^3+8x\right]_0^2$$
$$=\frac{448}{15}\pi$$

(2) $y=x^2-1$에서 $x^2=y+1$, $y=-x^2+1$에서 $x^2=1-y$이므로 구하는 회전체의 부피 V_y는

$$V_y=\pi\int_0^3(y+1)dy-\pi\int_0^1(1-y)dy$$
$$=\pi\left[\frac{1}{2}y^2+y\right]_0^3-\pi\left[y-\frac{1}{2}y^2\right]_0^1$$
$$=7\pi$$

2 (1) 곡선 $y=\cos x$와 직선 $y=-\frac{2}{\pi}x+1$의 교점의 x좌표는

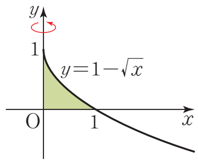
$x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$



따라서 구하는 회전체의 부피 V_x는

$$V_x=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\,dx-\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-\frac{2}{\pi}x+1\right)^2dx$$
$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2x}{2}dx$$
$$-\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{4}{\pi^2}x^2-\frac{4}{\pi}x+1\right)dx$$
$$=\pi\left[\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$-\pi\left[\frac{4}{3\pi^2}x^3-\frac{2}{\pi}x^2+x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\frac{\pi^2}{12}$$

(2)



$y=1-\sqrt{x}$에서 $x=(1-y)^2$이므로 구하는 회전체의 부피 V_y는

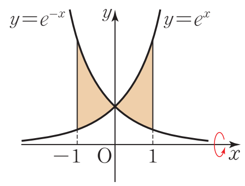
$$V_y=\pi\int_0^1\{(1-y)^2\}^2\,dy$$

$1-y=t$로 놓으면 $\quad -\frac{dy}{dt}=1$

$y=0$일 때 $t=1$, $y=1$일 때 $t=0$이므로

$$V_y=\pi\int_1^0 t^4(-dt)$$
$$=\pi\int_0^1 t^4\,dt$$
$$=\pi\left[\frac{1}{5}t^5\right]_0^1$$
$$=\frac{\pi}{5}$$

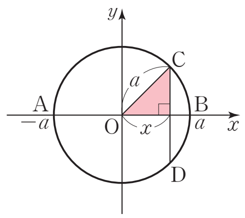
(3)



구하는 회전체의 부피는 두 곡선 $y=e^x$, $y=e^{-x}$과 직선 $x=1$로 둘러싸인 도형을 x축을 중심으로 회전시킬 때 생기는 회전체의 부피의 2배이다.
따라서 구하는 회전체의 부피 V_x는

$$V_x=2\left\{\pi\int_0^1(e^x)^2\,dx-\pi\int_0^1(e^{-x})^2\,dx\right\}$$
$$=2\pi\int_0^1(e^{2x}-e^{-2x})dx$$
$$=2\pi\left[\frac{1}{2}e^{2x}+\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^1$$
$$=2\pi\left(\frac{e^2}{2}+\frac{1}{2e^2}-1\right)$$
$$=\pi\left(e^2+\frac{1}{e^2}-2\right)$$

3 다음 그림과 같이 지름 AB의 중점을 원점, 직선 AB를 x축으로 잡으면 $\mathrm{A}(-a,\ 0)$, $\mathrm{B}(a,\ 0)$



현 CD와 x축이 만나는 점을 점 $(x,\ 0)$이라고 하면
$\overline{\mathrm{CD}}=2\sqrt{a^2-x^2}$
이 현을 한 변으로 하는 정삼각형의 넓이 $S(x)$는

$$S(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}(2\sqrt{a^2-x^2})^2$$

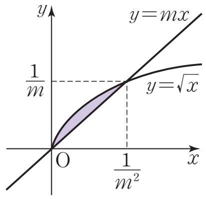
$=\sqrt{3}(a^2-x^2)$

따라서 구하는 입체도형의 부피 V는

$$V=2\int_0^a S(x)dx$$
$$=2\int_0^a \sqrt{3}(a^2-x^2)dx$$
$$=2\sqrt{3}\left[a^2x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^a$$
$$=\frac{4\sqrt{3}}{3}a^3$$

4 곡선 $y=\sqrt{x}$와 직선 $y=mx(m>0)$의 교점의 x좌표는 $\sqrt{x}=mx$에서

$x=0,\ x=\dfrac{1}{m^2}$



구간 $\left[0,\ \dfrac{1}{m^2}\right]$에서 $\sqrt{x}\geq mx$이므로 x축을 중심으로 회전시킬 때 생기는 회전체의 부피 V_x는

$$V_x=\pi\int_0^{\frac{1}{m^2}}(\sqrt{x})^2\,dx-\pi\int_0^{\frac{1}{m^2}}(mx)^2\,dx$$
$$=\pi\int_0^{\frac{1}{m^2}}(x-m^2x^2)dx$$
$$=\pi\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{m^2}{3}x^3\right]_0^{\frac{1}{m^2}}$$
$$=\frac{\pi}{6m^4}$$

또 $y=\sqrt{x}$에서 $x=y^2$, $y=mx$에서 $x=\dfrac{1}{m}y$이고

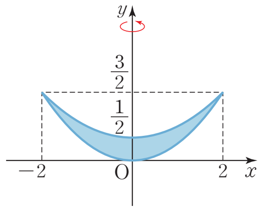
구간 $\left[0,\ \dfrac{1}{m}\right]$에서 $\dfrac{1}{m}y\geq y^2$이므로 y축을 중심으로 회전시킬 때 생기는 회전체의 부피 V_y는

$$V_y=\pi\int_0^{\frac{1}{m}}\left(\frac{1}{m}y\right)^2dy-\pi\int_0^{\frac{1}{m}}(y^2)^2\,dy$$
$$=\pi\int_0^{\frac{1}{m}}\left(\frac{1}{m^2}y^2-y^4\right)dy$$
$$=\pi\left[\frac{1}{3m^2}y^3-\frac{1}{5}y^5\right]_0^{\frac{1}{m}}$$
$$=\frac{2\pi}{15m^5}$$

조건에서 $V_x=V_y$이므로

$$\frac{\pi}{6m^4}=\frac{2\pi}{15m^5}\qquad\therefore m=\frac{4}{5}$$

5 직선 l을 y축으로 하고, 직선 l과 아래 포물선이 만나는 점을 원점으로 하여 좌표평면에 나타내면 다음 그림과 같다.



이때, 두 포물선의 방정식은

$y=\dfrac{1}{4}x^2+\dfrac{1}{2},\ y=\dfrac{3}{8}x^2$

$y=\dfrac{1}{4}x^2+\dfrac{1}{2}$에서 $\qquad x^2=4y-2$

$y=\dfrac{3}{8}x^2$에서 $\qquad x^2=\dfrac{8}{3}y$

구간 $\left[0,\ \dfrac{3}{2}\right]$에서

구하는 렌즈의 부피 V는

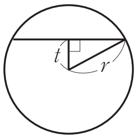
$$V=\pi\int_0^{\frac{3}{2}}\frac{8}{3}y\,dy-\pi\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}(4y-2)dy$$
$$=\pi\left[\frac{4}{3}y^2\right]_0^{\frac{3}{2}}-\pi\left[2y^2-2y\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}$$
$$=\pi$$

실생활 문제 해결하기 / P. 47

1단계 (1) 두 원기둥의 밑면의 반지름의 길이가 r이다.
두 원기둥의 중심축이 수직으로 만난다.

(2) 정사각형

2단계 (1) 단면인 정사각형의 한 변의 길이는 $2\sqrt{r^2-t^2}$이다.



(2) $-r\leq t\leq r$

3단계 (1) $S(t)=(2\sqrt{r^2-t^2})^2=4(r^2-t^2)$

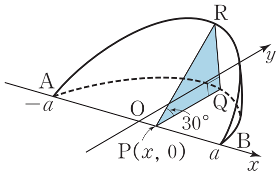
(2) $V=\displaystyle\int_{-r}^{r}S(t)dt$

$$=\int_{-r}^{r}4(r^2-t^2)dt=8\int_0^r(r^2-t^2)dt$$
$$=8\left[r^2t-\frac{1}{3}t^3\right]_0^r=8\left(r^3-\frac{1}{3}r^3\right)=\frac{16}{3}r^3$$

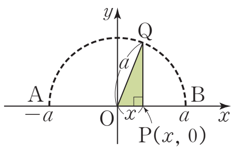
실력 키우기 / P. 48

1 평면 α가 지나는 지름의 양 끝 점을 각각 A, B라고 하자. 밑면의 중심 O를 원점, 밑면의 지름 AB의 연장

선을 x축, 중심을 지나고 선분 AB에 수직인 직선을 y축으로 하여 좌표평면에 나타내면 다음 그림과 같다.

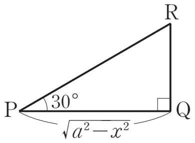


지름 AB 위의 임의의 점 $\mathrm{P}(x,\ 0)$을 지나고 선분 AB에 수직인 직선이 원과 만나는 점을 Q라고 하면



$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{a^2-x^2}$

점 Q에서 좌표평면에 수직이 되도록 그은 직선이 평면 α와 만나는 점을 R라고 하면 △PQR에서 $\angle\mathrm{Q}=90^\circ$, $\angle\mathrm{P}=30^\circ$이므로



$\overline{\mathrm{QR}}=\overline{\mathrm{PQ}}\tan 30^\circ=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{a^2-x^2}$

이때, △PQR의 넓이를 $S(x)$라고 하면

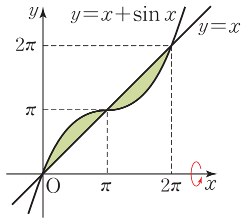
$$S(x)=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{a^2-x^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{a^2-x^2}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{6}(a^2-x^2)$$

따라서 구하는 입체도형의 부피 V는

$$V=\int_{-a}^{a}S(x)dx$$
$$=\int_{-a}^{a}\frac{\sqrt{3}}{6}(a^2-x^2)dx$$
$$=\frac{2\sqrt{3}}{6}\int_{0}^{a}(a^2-x^2)dx$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{3}\left[a^2x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^a=\frac{2\sqrt{3}}{9}a^3$$

2 곡선 $y=x+\sin x\,(0\le x\le 2\pi)$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는 $x+\sin x=x$에서

$x=0,\ x=\pi,\ x=2\pi$



구간 $[0,\ \pi]$에서 $x+\sin x\ge x$이고 구간 $[\pi,\ 2\pi]$에서 $x\ge x+\sin x$이므로 구하는 회전체의 부피 V는

$$V=\pi\int_0^{\pi}(x+\sin x)^2dx-\pi\int_0^{\pi}x^2dx$$
$$+\pi\int_{\pi}^{2\pi}x^2dx-\pi\int_{\pi}^{2\pi}(x+\sin x)^2dx$$
$$=\pi\int_0^{\pi}(2x\sin x+\sin^2x)dx$$
$$-\pi\int_{\pi}^{2\pi}(2x\sin x+\sin^2x)dx$$
$$=\pi\int_0^{\pi}\left(2x\sin x+\frac{1-\cos 2x}{2}\right)dx$$
$$-\pi\int_{\pi}^{2\pi}\left(2x\sin x+\frac{1-\cos 2x}{2}\right)dx$$
$$=\pi\left\{\Big[-2x\cos x\Big]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}(-2\cos x)dx\right.$$
$$\left.+\left[\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{\pi}\right\}$$
$$-\pi\left\{\Big[-2x\cos x\Big]_{\pi}^{2\pi}-\int_{\pi}^{2\pi}(-2\cos x)dx\right.$$
$$\left.+\left[\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x\right]_{\pi}^{2\pi}\right\}$$
$$=\pi\left(2\pi+\Big[2\sin x\Big]_0^{\pi}+\frac{\pi}{2}\right)$$
$$-\pi\left(-6\pi+\Big[2\sin x\Big]_{\pi}^{2\pi}+\frac{\pi}{2}\right)$$
$$=8\pi^2$$

3 $y'=e^x$이므로 곡선 $y=e^x$ 위의 점 $(t,\ e^t)$에서의 접선의 방정식은

$y-e^t=e^t(x-t)$

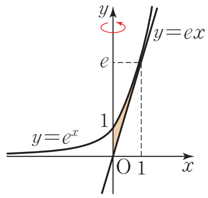
이 직선이 원점을 지나므로

$-e^t=e^t(-t)$

$\therefore t=1$

따라서 접선의 방정식은

$y=ex$



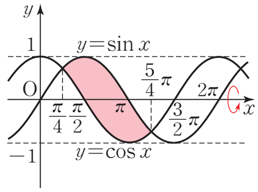
$y=ex$에서 $x=\dfrac{1}{e}y$이고, $y=e^x$에서 $x=\ln y$이므로

구하는 회전체의 부피 V는

$$V=\pi\int_0^{e}\left(\frac{1}{e}y\right)^2dy-\pi\int_1^{e}(\ln y)^2dy$$

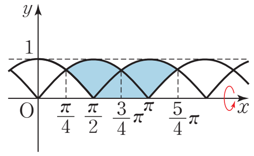
$$=\pi\left[\frac{1}{3e^2}y^3\right]_0^e-\pi\left[y(\ln y)^2\right]_1^e+\pi\int_1^e 2\ln y\,dy$$
$$=\frac{1}{3}\pi e-\pi e+2\pi\left[y\ln y\right]_1^e-2\pi\int_1^e y\cdot\frac{1}{y}\,dy$$
$$=\frac{2}{3}\pi(3-e)$$

4 두 곡선 $y=\sin x$, $y=\cos x$의 교점의 x좌표는 $\sin x=\cos x$에서



$x=\frac{\pi}{4}$, $x=\frac{5}{4}\pi$

이때, x축의 아래쪽 부분을 x축에 대하여 대칭이동하면 다음 그림과 같다.



따라서 구하는 회전체의 부피 V는

$$V=2\left\{\pi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,dx-\pi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\,dx\right.$$
$$\left.+\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{4}\pi}\sin^2 x\,dx\right\}$$
$$=-2\pi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos 2x\,dx+2\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{4}\pi}\frac{1-\cos 2x}{2}\,dx$$
$$=-2\pi\left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}+2\pi\left[\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{4}\pi}$$
$$=\frac{\pi}{4}(\pi+6)$$

5 (1) 그릇은 $x^2+(y-r)^2=r^2\,(0\le y\le r)$의 반원을 y축을 중심으로 회전시켜 얻은 것으로 생각할 수 있다.

이 그릇을 θ만큼 기울였을 때의 물의 깊이는 $r-r\sin\theta$이므로

$$V=\pi\int_0^{r-r\sin\theta}x^2\,dy$$
$$=\pi\int_0^{r-r\sin\theta}\{r^2-(y-r)^2\}\,dy$$
$$=\pi\int_0^{r-r\sin\theta}(2ry-y^2)\,dy$$
$$=\pi\left[ry^2-\frac{1}{3}y^3\right]_0^{r-r\sin\theta}$$
$$=\frac{\pi}{3}r^3(2+\sin\theta)(1-\sin\theta)^2$$

(2) 남은 물의 양을 V_1이라고 하면

$$V_1=\frac{\pi}{3}r^3\left(2+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)^2$$
$$=\frac{5}{24}\pi r^3$$

흘러나온 물의 양을 V_2라고 하면

$$V_2=\frac{2}{3}\pi r^3-\frac{5}{24}\pi r^3$$
$$=\frac{11}{24}\pi r^3$$
$$\therefore V_2:V_1=\frac{11}{24}\pi r^3:\frac{5}{24}\pi r^3$$
$$=11:5$$

3. 속도와 거리

바탕 다지기 / P. 50

| 스스로 하기 |

1 (1) $2t^3-9t^2+12t$, 9
(2) $-$, 11

1 (1) 점 P가 원점에서 출발하였으므로

$x(0)=0$

따라서 구하는 위치 $x(t)$는

$$x(t)=\int_0^t(-t^2+4t)\,dt$$
$$=\left[-\frac{1}{3}t^3+2t^2\right]_0^t$$
$$=-\frac{1}{3}t^3+2t^2$$

(2) $x(3)=-\frac{1}{3}\cdot 3^3+2\cdot 3^2$
$=9$

2 $\frac{dx}{dt}=e^t\cos t-e^t\sin t$

$\frac{dy}{dt}=e^t\sin t+e^t\cos t$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2$$
$$=(e^t\cos t-e^t\sin t)^2+(e^t\sin t+e^t\cos t)^2$$
$$=2e^{2t}$$

따라서 시각 $t=0$에서 $t=1$까지 점 P가 움직인 거리 s는

$$s=\int_0^1 \sqrt{2e^{2t}}\,dt$$
$$=\int_0^1 \sqrt{2}\,e^t\,dt=\sqrt{2}\Big[\,e^t\,\Big]_0^1$$
$$=\sqrt{2}(e-1)$$

기본 익히기 / P. 51

1 (1) t초 후의 높이를 $h(t)$라고 하면

$$h(t)=55+\int_0^t (50-10t)\,dt$$
$$=55+\Big[\,50t-5t^2\,\Big]_0^t$$
$$=-5t^2+50t+55$$

6초 후의 물체의 높이 $h(6)$은

$$h(6)=-5\cdot6^2+50\cdot6+55$$
$$=175\ (\mathrm{m})$$

(2) 최고점에 도달하였을 때 속도 $v(t)=0$이므로

$50-10t=0$

$\therefore t=5$

즉, 5초 후에 최고점에 도달한다.

따라서 이때의 물체의 높이 $h(5)$는

$$h(5)=-5\cdot5^2+50\cdot5+55$$
$$=180\ (\mathrm{m})$$

(3) 지면에 떨어지는 순간의 높이 $h(t)=0$이므로

$-5t^2+50t+55=0$

$t=-1$ 또는 $t=11$

이때, $t>0$이므로

$t=11$

따라서 $t=11$일 때의 속도 $v(11)$은

$$v(11)=50-10\cdot11$$
$$=-60\ (\mathrm{m/s})$$

(4) $t=5$일 때 최고점에 도달하므로 물체를 던진 후 2초부터 8초까지 움직인 거리 s는

$$s=\int_2^8 |50-10t|\,dt$$
$$=\int_2^5 (50-10t)\,dt-\int_5^8 (50-10t)\,dt$$
$$=\Big[\,50t-5t^2\,\Big]_2^5-\Big[\,50t-5t^2\,\Big]_5^8$$
$$=90\ (\mathrm{m})$$

2 $0\le t\le 1$일 때,

$v(t)=t^3$

$t\ge 1$일 때

$v(t)=(2-t)^3$

$t=1$일 때 점 P의 위치 x_1은

$$x_1=2+\int_0^1 t^3\,dt=2+\Big[\,\frac{1}{4}t^4\,\Big]_0^1=\frac{9}{4}$$

$t=1.5$일 때 점 P의 위치 x_2는

$$x_2=2+\int_0^1 t^3\,dt+\int_1^{1.5}(2-t)^3\,dt$$
$$=2+\Big[\,\frac{1}{4}t^4\,\Big]_0^1+\Big[\,-\frac{1}{4}(2-t)^4\,\Big]_1^{1.5}$$
$$=\frac{159}{64}$$

3 (1) $\dfrac{dx}{dt}=6t^2,\ \dfrac{dy}{dt}=6t$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=36t^4+36t^2$$

따라서 시각 $t=0$에서 $t=\sqrt{3}$까지 점 P가 움직인 거리 s는

$$s=\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{36t^4+36t^2}\,dt$$
$$=\int_0^{\sqrt{3}} 6t\sqrt{t^2+1}\,dt$$

$t^2+1=u$로 놓으면

$$2t\,\frac{dt}{du}=1$$

$t=0$일 때 $u=1$, $t=\sqrt{3}$일 때 $u=4$이므로

$$\int_0^{\sqrt{3}} 6t\sqrt{t^2+1}\,dt$$
$$=\int_1^4 3\sqrt{u}\,du$$
$$=\Big[\,2u^{\frac{3}{2}}\,\Big]_1^4=14$$

(2) $\dfrac{dx}{dt}=-4t\sin(2t^2+1)$

$\dfrac{dy}{dt}=4t\cos(2t^2+1)$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2$$
$$=\{-4t\sin(2t^2+1)\}^2+\{4t\cos(2t^2+1)\}^2$$
$$=16t^2$$

따라서 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리 s는

$$s=\int_0^2 \sqrt{16t^2}\,dt$$
$$=\int_0^2 4t\,dt$$
$$=\Big[\,2t^2\,\Big]_0^2=8$$

4 $\sqrt{\left(\frac{\cos t}{t^2+1}\right)^2+\left(\frac{\sin t}{t^2+1}\right)^2}=\frac{1}{t^2+1}$이므로 시각 $t=0$에서 $t=\sqrt{3}$까지 점 P가 움직인 거리 s는

$$s=\int_0^{\sqrt{3}}\frac{1}{t^2+1}dt$$

$t=\tan\theta$ $\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$로 놓으면

$$\frac{dt}{d\theta}=\frac{1}{\cos^2\theta}$$

$t=0$일 때 $\theta=0$, $t=\sqrt{3}$일 때 $\theta=\frac{\pi}{3}$이므로

$$s=\int_0^{\sqrt{3}}\frac{1}{t^2+1}dt=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos^2\theta\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}d\theta=\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi}{3}$$

5 정지할 때의 속도 $v(t)=0$이므로

$30-\frac{3}{2}t=0$에서 $\quad t=20$

$t=0$에서 $t=20$까지 달린 거리 s는

$$s=\int_0^{20}\left(30-\frac{3}{2}t\right)dt$$

$$=\left[30t-\frac{3}{4}t^2\right]_0^{20}$$

$$=300$$

따라서 완전히 정지할 때까지 걸린 시간은 20초이고, 달린 거리는 300 m이다.

실력 키우기 / P. 52

1 (1) 시각 $t=0$에서 $t=4$까지 움직인 거리 s는

$$s=\int_0^4\left|e-e^{2-\frac{t}{2}}\right|dt$$

$$=-\int_0^2\left(e-e^{2-\frac{t}{2}}\right)dt+\int_2^4\left(e-e^{2-\frac{t}{2}}\right)dt$$

$$=-\left[et+2e^{2-\frac{t}{2}}\right]_0^2+\left[et+2e^{2-\frac{t}{2}}\right]_2^4$$

$$=2e^2-4e+2$$

(2) 시각 $t=4$일 때의 좌표 x는

$$x=-2+\int_0^4\left(e-e^{2-\frac{t}{2}}\right)dt$$

$$=-2+\left[et+2e^{2-\frac{t}{2}}\right]_0^4$$

$$=4e-2e^2$$

2 t초 후의 점 R의 속도를 $v(t)$라고 하면

$$v(t)=\frac{1}{2}\left\{v_1(t)+v_2(t)\right\}$$

$$=\frac{3}{2}t^2-t$$

t초 후의 점 R의 위치 x는

$$x=\int_0^t\left(\frac{3}{2}t^2-t\right)dt$$

$$=\left[\frac{1}{2}t^3-\frac{1}{2}t^2\right]_0^t$$

$$=\frac{1}{2}t^3-\frac{1}{2}t^2$$

점 R가 원점을 지날 때의 위치는 0이므로

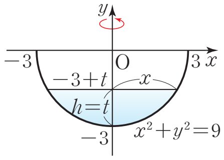
$$\frac{1}{2}t^3-\frac{1}{2}t^2=0$$

$\therefore t=0$ 또는 $t=1$

따라서 점 R가 다시 원점을 지날 때까지 걸리는 시간은 1초이다.

3 (1) 주어진 용기는 반원 $x^2+y^2=9$ $(-3\le y\le 0)$를 y축을 중심으로 회전시킬 때 생기는 회전체이다. 수면의 높이를 h라고 하면 매분 1 m의 속도로 수면이 상승하므로

$$\frac{dh}{dt}=1 \qquad \therefore h=t$$



따라서 넣은 물의 양 V는

$$V=\pi\int_{-3}^{-3+t}(9-y^2)dy$$

$$=\pi\left[9y-\frac{1}{3}y^3\right]_{-3}^{-3+t}$$

$$=\pi\left(-\frac{1}{3}t^3+3t^2\right)$$

(2) t분 후 수면의 넓이를 S라고 하면

$$S=\frac{dV}{dt}=\pi(-t^2+6t)$$

따라서 구하는 수면의 넓이의 증가 속도 v는

$$v=\frac{dS}{dt}=\pi(-2t+6)$$

(3) 수면의 반지름의 길이를 x라고 하면

$$x^2=9-y^2$$

$$=9-(-3+t)^2=-t^2+6t$$

$\therefore x=\sqrt{-t^2+6t}$

따라서 구하는 수면의 반지름의 길이의 증가 속도 w는

$$w=\frac{dx}{dt}$$

$$=\frac{-2t+6}{2\sqrt{-t^2+6t}}$$
$$=\frac{-t+3}{\sqrt{-t^2+6t}}$$

4 (1) $t=0$에서 $t=1$까지의 길이 l은
$$l=\int_0^1\sqrt{(-\sin t)^2+(\cos t)^2}\,dt$$
$$=\int_0^1 1\,dt=\Big[\,t\,\Big]_0^1=1$$
(2) $x=0$에서 $x=\frac{1}{2}$까지의 길이 l은
$$l=\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+\left(\frac{-2x}{1-x^2}\right)^2}\,dx$$
$$=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1+x^2}{1-x^2}\,dx$$
$$=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{1-x^2}-1\right)dx$$
$$=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right)dx-\int_0^{\frac{1}{2}}1\,dx$$
$$=\Big[\ln|1+x|+\ln|1-x|\,\Big]_0^{\frac{1}{2}}-\Big[\,x\,\Big]_0^{\frac{1}{2}}$$
$$=\ln\frac{3}{4}-\frac{1}{2}$$

5 $a(t)=\sqrt[3]{t}$이므로
$$v(t)=\int_0^t\sqrt[3]{t}\,dt$$
$$=\Big[\,\frac{3}{4}t^{\frac{4}{3}}\,\Big]_0^t=\frac{3}{4}t^{\frac{4}{3}}$$
따라서 비행기가 8초 동안 움직인 거리는
$$\int_0^8\frac{3}{4}t^{\frac{4}{3}}dt=\Big[\,\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{7}t^{\frac{7}{3}}\,\Big]_0^8$$
$$=\frac{288}{7}\ (\mathrm{m})$$

프로젝트 / P. 53

논술/수행평가 과제

1 $x^2+(y-3)^2=4$에서
$y=3\pm\sqrt{4-x^2}$
구하는 부피 V는 반원 $y=3+\sqrt{4-x^2}$ 을 x축을 중심으로 회전시킬 때 생기는 회전체의 부피에서 반원 $y=3-\sqrt{4-x^2}$을 x축을 중심으로 회전시킬 때 생기는 회전체의 부피를 뺀 것과 같으므로
$$V=\pi\int_{-2}^2(3+\sqrt{4-x^2})^2\,dx$$
$$-\pi\int_{-2}^2(3-\sqrt{4-x^2})^2\,dx$$
$$=12\pi\int_{-2}^2\sqrt{4-x^2}\,dx$$
$x=2\sin t\left(-\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}\right)$로 놓으면
$$\frac{dx}{dt}=2\cos t$$
$x=-2$일 때 $t=-\frac{\pi}{2}$, $x=2$일 때 $t=\frac{\pi}{2}$이므로
$$V=12\pi\int_{-2}^2\sqrt{4-x^2}\,dx$$
$$=12\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{4-4\sin^2 t}\cdot 2\cos t\,dt$$
$$=48\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt$$
$$=48\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt$$
$$=48\pi\Big[\,\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin 2t\,\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=24\pi^2$$

2 원의 중심으로부터 x축까지의 거리는 3이고, 원의 넓이는 4π이므로
$V=2\cdot\pi\cdot 3\cdot 4\pi=24\pi^2$
비교: **1, 2**에서 각각 구한 회전체의 부피는 같다.

대단원 확인하기 P. 54, 55

1 $\int_2^4 f(x)dx-\int_3^4 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx$
$$=\int_1^2 f(x)dx+\int_2^4 f(x)dx-\int_3^4 f(x)dx$$
$$=\int_1^4 f(x)dx+\int_4^3 f(x)dx$$
$$=\int_1^3 f(x)dx=\int_1^3(-x^2+4x)dx$$
$$=\Big[-\frac{1}{3}x^3+2x^2\Big]_1^3=\frac{22}{3}$$

2 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면
$f(x)+xf'(x)=2x^2+f(x)$
$\therefore\ xf'(x)=2x^2$
이 등식은 모든 실수 x에 대하여 성립하므로
$f'(x)=2x$
$\therefore\ f(x)=\int 2x\,dx=x^2+C$

$f(0)=0$이므로 $\quad C=0$
따라서 $f(x)=x^2$이므로
$f(2)=4$

3 $\displaystyle\int_0^1 (x-k)^2 f(x)dx$

$\displaystyle=\int_0^1 (x^2-2kx+k^2)f(x)dx$

$\displaystyle=k^2\int_0^1 f(x)dx-2k\int_0^1 xf(x)dx+\int_0^1 x^2f(x)dx$

$\displaystyle=k^2-4k+\int_0^1 x^2f(x)dx$

$\displaystyle\int_0^1 x^2f(x)dx$는 상수이므로 a로 놓으면

$k^2-4k+a=(k-2)^2-4+a$

따라서 주어진 정적분은 $k=2$일 때 최솟값을 갖는다.

4 (주어진 식)

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\sin\left(\frac{k}{n}\pi\right)\right\}^3\frac{\pi}{n}$

$\displaystyle=\int_0^1 \{\sin(\pi x)\}^3\pi\, dx$

$\pi x=t$로 놓으면

$\pi\dfrac{dx}{dt}=1$

$x=0$일 때 $t=0$, $x=1$일 때 $t=\pi$이므로

$\displaystyle\int_0^1 \{\sin(\pi x)\}^3\pi\, dx$

$\displaystyle=\int_0^\pi \sin^3 t\, dt=\int_0^\pi \sin^2 t\sin t\, dt$

$\displaystyle=\int_0^\pi (1-\cos^2 t)\sin t\, dt$

$\cos t=u$로 놓으면

$-\sin t\dfrac{dt}{du}=1$

$t=0$일 때 $u=1$, $t=\pi$일 때 $u=-1$이므로

$\displaystyle\int_0^\pi (1-\cos^2 t)\sin t\, dt$

$\displaystyle=\int_1^{-1}(1-u^2)(-du)$

$\displaystyle=\int_{-1}^{1}(1-u^2)du$

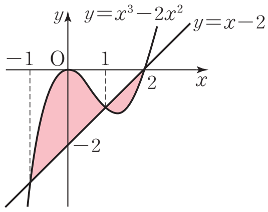
$\displaystyle=2\int_0^1 (1-u^2)du$

$\displaystyle=2\left[u-\frac{1}{3}u^3\right]_0^1$

$=\dfrac{4}{3}$

5 (1) 곡선 $y=x^3-2x^2$과 직선 $y=x-2$의 교점의 x좌표는 $x^3-2x^2=x-2$에서

$x=-1,\ x=1,\ x=2$



구간 $[-1,\ 1]$에서 $x^3-2x^2\ge x-2$이고, 구간 $[1,\ 2]$에서 $x-2\ge x^3-2x^2$이므로 구하는 넓이 S는

$\displaystyle S=\int_{-1}^{2}|(x^3-2x^2)-(x-2)|dx$

$\displaystyle=\int_{-1}^{1}\{(x^3-2x^2)-(x-2)\}dx$

$\displaystyle\quad+\int_1^2\{(x-2)-(x^3-2x^2)\}dx$

$\displaystyle=2\int_0^1(-2x^2+2)dx$

$\displaystyle\quad+\int_1^2(-x^3+2x^2+x-2)dx$

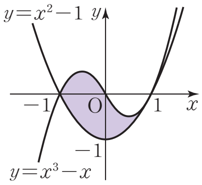
$\displaystyle=2\left[-\frac{2}{3}x^3+2x\right]_0^1$

$\displaystyle\quad+\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-2x\right]_1^2$

$=\dfrac{37}{12}$

(2) 두 곡선 $y=x^3-x$, $y=x^2-1$의 교점의 x좌표는 $x^3-x=x^2-1$에서

$x=-1, x=1$



구간 $[-1,\ 1]$에서 $x^3-x\ge x^2-1$이므로 구하는 넓이 S는

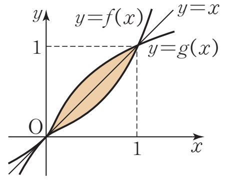
$\displaystyle S=\int_{-1}^{1}|(x^3-x)-(x^2-1)|\,dx$

$\displaystyle=\int_{-1}^{1}\{(x^3-x)-(x^2-1)\}\,dx$

$\displaystyle=2\int_0^1(-x^2+1)dx$

$$=2\left[-\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^1=\frac{4}{3}$$

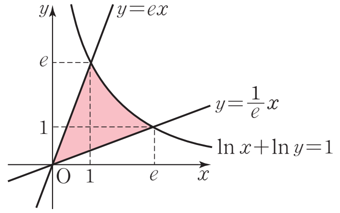
6 다음 그림과 같이 곡선 $y=f(x)$와 곡선 $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.



따라서 구하는 넓이 S는

$$S=2\int_0^1\{x-(x^3-x^2+x)\}dx$$
$$=2\int_0^1(-x^3+x^2)dx$$
$$=2\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{6}$$

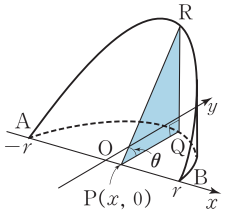
7 곡선 $\ln x+\ln y=1$과 두 직선 $y=ex$, $y=\frac{1}{e}x$로 둘러싸인 도형은 다음 그림과 같다.



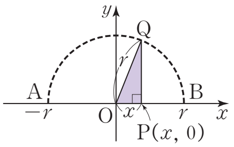
$\ln x+\ln y=1$에서 $y=\frac{e}{x}(x>0)$이므로 구하는 넓이 S는

$$S=\int_0^1 ex\,dx+\int_1^e \frac{e}{x}dx-\int_0^e \frac{1}{e}x\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}ex^2\right]_0^1+\left[e\ln|x|\right]_1^e-\left[\frac{1}{2e}x^2\right]_0^e$$
$$=e$$

8 원기둥의 밑면의 중심 O에 수면이 나타날 때 밑면의 중심 O를 원점, 밑면의 지름의 양 끝 점을 A, B라고 하자. 밑면의 지름 AB의 연장선을 x축, O를 지나고 선분 AB에 수직인 직선을 y축으로 하여 좌표평면에 나타내면 다음과 같다.



지름 AB 위의 임의의 점 P$(x,\ 0)$을 지나고 선분 AB에 수직인 직선이 원과 만나는 점을 Q라고 하면



$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{r^2-x^2}$

점 P를 지나고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면을 △PQR, ∠QPR$=\theta$라 하고 원기둥의 높이를 h라고 하면

$\overline{\mathrm{QR}}=\overline{\mathrm{PQ}}\tan\theta$

$\tan\theta=\frac{h}{r}$

이때, △PQR의 넓이를 $S(x)$라고 하면

$$S(x)=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{r^2-x^2}\cdot\sqrt{r^2-x^2}\cdot\frac{h}{r}$$
$$=\frac{h}{2r}(r^2-x^2)$$

따라서 남아 있는 물의 양을 V_1이라고 하면

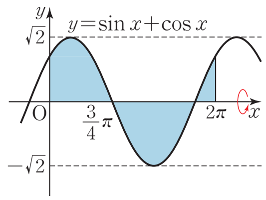
$$V_1=\int_{-r}^{r}S(x)dx$$
$$=2\int_0^r\frac{h}{2r}(r^2-x^2)dx$$
$$=\frac{h}{r}\left[r^2x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^r$$
$$=\frac{2}{3}r^2h$$

한편 처음 물의 양을 V_2라고 하면

$V_2=\pi r^2h$

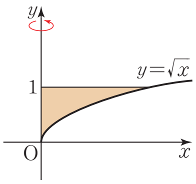
$\therefore V_1 : V_2=\frac{2}{3}r^2h : \pi r^2h=2 : 3\pi$

9 (1)



$$V_x=\pi\int_0^{2\pi}y^2dx$$
$$=\pi\int_0^{2\pi}(\sin x+\cos x)^2dx$$
$$=\pi\int_0^{2\pi}(1+2\sin x\cos x)dx$$
$$=\pi\int_0^{2\pi}(1+\sin 2x)dx$$
$$=\pi\left[x-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{2\pi}$$
$$=2\pi^2$$

(2)



$$V_y=\pi\int_0^1 x^2\,dy$$
$$=\pi\int_0^1 y^4\,dy$$
$$=\pi\left[\frac{1}{5}y^5\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{5}\pi$$

10 $\dfrac{dx}{dt}=-3a\cos^2 t\sin t$

$\dfrac{dy}{dt}=3a\sin^2 t\cos t$

$\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2$

$=9a^2\cos^4 t\sin^2 t+9a^2\sin^4 t\cos^2 t$

$=9a^2\cos^2 t\sin^2 t$

따라서 $t=0$에서 $t=\dfrac{\pi}{2}$까지의 길이 l은

$$l=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{9a^2\cos^2 t\sin^2 t}\,dt$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}3a\cos t\sin t\,dt$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{3}{2}a\sin 2t\,dt$$
$$=\left[-\frac{3}{4}a\cos 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3}{2}a$$

11 정지할 때의 속도 $v(t)=0$이므로

$v(t)=2-t+\dfrac{28}{t+1}=0$

$t-2=\dfrac{28}{t+1}$, $t^2-t-2=28$

$(t-6)(t+5)=0$

$t>0$이므로 $t=6$

따라서 $t=0$에서 $t=6$까지 달린 거리 s는

$$s=\int_0^6\left(2-t+\frac{28}{t+1}\right)dt$$
$$=\left[2t-\frac{1}{2}t^2+28\ln|t+1|\right]_0^6$$
$$=-6+28\ln 7\ (\text{m})$$

Ⅱ. 순열과 조합

1. 순열, 조합과 이항정리

순열, 조합과 이항정리에 들어가기 전에 / P. 59

1 합의 법칙에 의하여

$4+5=9$(가지)

2 60을 소인수분해하면

$60=2^2\times3\times5$

2^2의 약수는 1, 2, 2^2

3의 약수는 1, 3

5의 약수는 1, 5

따라서 60의 양의 약수의 개수는 곱의 법칙에 의하여

$3\times2\times2=12$(개)

3 (1) 여학생 3명을 묶어서 1명으로 생각하면 4명을 일렬로 세우는 경우의 수는

4!가지

이 배열 각각에 대하여 여학생 3명의 순서를 바꾸어 세우는 경우의 수는

3!가지

따라서 구하는 경우의 수는

$4!\times3!=144$(가지)

(2) 남학생이 양 끝에 서는 경우의 수는

${}_3P_2$가지

나머지 4명이 일렬로 서는 경우의 수는

4!가지

따라서 구하는 경우의 수는

${}_3P_2\times4!=144$(가지)

4 (1) ${}_9C_4\times{}_5C_3\times{}_2C_2=1260$(가지)

(2) ${}_9C_6\times{}_3C_2\times{}_1C_1=252$(가지)

1. 중복순열과 원순열

바탕 다지기 / P. 61

| 스스로 하기 |

1 5, 5, 32

2 1, 24

3 2, 2, 1260

1 서로 다른 5개에서 3개를 택하는 중복순열이므로
${}_5\Pi_3=5^3=125$(개)

2 2개의 s, 2개의 e, 1개의 n을 일렬로 배열하는 순열이므로
$\dfrac{5!}{2!2!1!}=30$(가지)

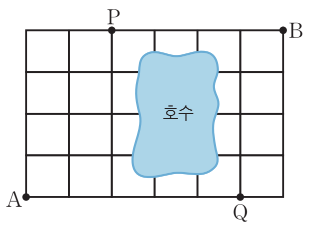
기본 익히기 / P. 62

1 (1) 서로 다른 5개에서 3개를 택하는 중복순열이므로
${}_5\Pi_3=5^3=125$(개)
(2) 백의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 3, 5, 7의
4가지
그 각각에 대하여 십의 자리, 일의 자리에 올 수 있는 숫자는 0, 1, 3, 5, 7이다. 즉, 서로 다른 5개에서 2개를 택하는 중복순열이므로
${}_5\Pi_2$가지
따라서 구하는 경우의 수는
$4\times{}_5\Pi_2=4\times5^2=100$(개)

2 부부를 각각 하나로 묶어서 생각하면 4명이 식탁에 둘러앉는 원순열이므로
$(4-1)!=3!=6$(가지)
이 배열 각각에 대하여 부부끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는
$2!\times2!\times2!\times2!=16$(가지)
따라서 구하는 경우의 수는
$6\times16=96$(가지)

3 1로 시작하는 여섯 자리 자연수는 나머지 다섯 자리에 0, 1, 2, 2, 2를 일렬로 배열하는 순열이므로
$\dfrac{5!}{3!1!1!}=20$(개)
2로 시작하는 여섯 자리 자연수는 나머지 다섯 자리에 0, 1, 1, 2, 2를 일렬로 배열하는 순열이므로
$\dfrac{5!}{2!2!1!}=30$(개)
따라서 구하는 자연수의 개수는
$20+30=50$(개)

4 A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우는 다음 그림에서 A → P → B 또는 A → Q → B이다.

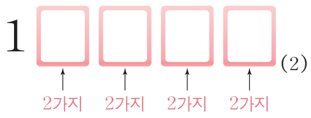


A → P → B로 가는 경우는
$\dfrac{6!}{2!4!}\times1=15$(가지)
A → Q → B로 가는 경우는
$1\times\dfrac{5!}{1!4!}=5$(가지)
따라서 구하는 경우의 수는
$15+5=20$(가지)

5 여섯 가지 색을 각각 1, 2, 3, 4, 5, 6이라고 하자.
1을 칠한 면을 아랫면으로 고정시키면 마주보는 면에 칠할 수 있는 색은
5가지
그 각각에 대하여 옆면에 색을 칠하는 경우는 나머지 4가지 색을 원형으로 칠하는 원순열이므로
$(4-1)!=3!$(가지)
따라서 구하는 경우의 수는
$5\times3!=30$(가지)

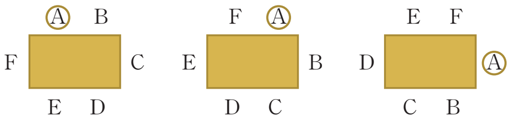
실력 키우기 / P.63

1 1의 자리, 2^1의 자리, 2^2의 자리, 2^3의 자리에 각각 0, 1 두 가지의 숫자가 올 수 있다.



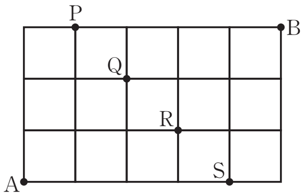
따라서 서로 다른 2개에서 4개를 택하는 중복순열이므로
${}_2\Pi_4=2^4=16$(개)

2 6명을 원형으로 배열하는 원순열의 수는
$(6-1)!=5!$(가지)
이때, 직사각형 모양의 식탁에서는 원형으로 배열하는 한 가지 방법에 대하여 다음 그림과 같이 서로 다른 경우가 3가지씩 존재한다.



따라서 구하는 경우의 수는
$5!\times3=360$(가지)

3 갑과 을이 모두 8칸을 움직여야 하므로 두 사람이 각각 4칸씩 움직인 지점에서 만날 수 있다. 따라서 두 사람은 다음 그림과 같이 P, Q, R, S에서 만날 수 있다.



(i) P 지점에서 만나는 경우
$$\left(\frac{4!}{3!1!}\times1\right)\times\left(1\times\frac{4!}{3!1!}\right)=16(\text{가지})$$
(ii) Q 지점에서 만나는 경우
$$\left(\frac{4!}{2!2!}\times\frac{4!}{3!1!}\right)\times\left(\frac{4!}{3!1!}\times\frac{4!}{2!2!}\right)=576(\text{가지})$$
(iii) R 지점에서 만나는 경우
$$\left(\frac{4!}{3!1!}\times\frac{4!}{2!2!}\right)\times\left(\frac{4!}{2!2!}\times\frac{4!}{3!1!}\right)=576(\text{가지})$$
(iv) S 지점에서 만나는 경우
$$\left(1\times\frac{4!}{3!1!}\right)\times\left(\frac{4!}{3!1!}\times1\right)=16(\text{가지})$$
따라서 구하는 경우의 수는
$16+576+576+16=1184$(가지)

4 바깥쪽의 네 영역에 4가지 색을 칠하는 경우의 수는
$\frac{{}_8P_4}{4}=420$(가지)
이 경우 각각에 대하여 안쪽의 네 영역에 나머지 4가지 색을 칠하는 경우의 수는
$4!=24$(가지)
따라서 구하는 경우의 수는
$420\times24=10080$(가지)

5 집합 B의 4개의 원소에서 5개를 택하는 중복순열이므로
${}_4\Pi_5=4^5=1024$(가지)

2. 중복조합

바탕 다지기 / P. 66

| 스스로 하기 |
1 (1) 2, 5, 10 (2) 5, 7, 7, 21
2 9, 9, 9, 11, 55

1 세 문자 a, b, c 중에서 5개를 택하는 중복조합이므로
${}_3H_5={}_{3+5-1}C_5={}_7C_5={}_7C_2=21$(개)

2 서로 다른 3개에서 6개를 택하는 중복조합이므로
${}_3H_6={}_{3+6-1}C_6={}_8C_6={}_8C_2=28$(가지)

기본 익히기 / P. 67

1 (1) ${}_nH_4=15$이므로
${}_{n+4-1}C_4={}_{n+3}C_4=15$
$$\frac{(n+3)(n+2)(n+1)n}{4\times3\times2\times1}=15$$
$(n+3)(n+2)(n+1)n=6\times5\times4\times3$
$\therefore n=3$
(2) ${}_8H_r=120$이므로
${}_{8+r-1}C_r=120$
${}_{7+r}C_r={}_{7+r}C_7$이므로
${}_{7+r}C_7=120$
$$\frac{(7+r)(6+r)(5+r)\cdots(1+r)}{7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}=120$$
$(7+r)(6+r)(5+r)\cdots(1+r)$
$=10\times9\times8\times7\times6\times5\times4$
$1+r=4\qquad\therefore r=3$

2 (1) 세 문자 a, b, c 중에서 7개를 택하는 중복조합이므로
${}_3H_7={}_{3+7-1}C_7={}_9C_7={}_9C_2=36$(개)
(2) 네 문자 a, b, c, d 중에서 7개를 택하는 중복조합이므로
${}_4H_7={}_{4+7-1}C_7={}_{10}C_7={}_{10}C_3=120$(개)

3 예를 들어 방정식 $x+y+z=9$의 음이 아닌 정수해 중에서 $x=2, y=4, z=3$은 x를 2개, y를 4개, z를 3개 택하는 것으로 생각하자.
이때, 구하는 해의 개수는 x, y, z에서 9개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_3H_9={}_{3+9-1}C_9={}_{11}C_9={}_{11}C_2=55$(개)

4 모든 학생이 적어도 한 자루의 연필을 받아야 하므

로 먼저 네 명의 학생에게 연필 한 자루씩을 나누어 준다. 이때, 남은 연필 8자루를 네 명의 학생에게 나누어 주는 경우는 서로 다른 4개에서 8개를 택하는 중복조합이므로

${}_4H_8={}_{4+8-1}C_8={}_{11}C_8={}_{11}C_3=165$(가지)

5 선거에 출마한 3명 중에서 중복을 허용하여 15번 뽑는 경우이다. 즉, 서로 다른 3개에서 15개를 택하는 중복조합이므로

${}_3H_{15}={}_{3+15-1}C_{15}={}_{17}C_{15}={}_{17}C_2=136$(가지)

실력 키우기 / P. 68

1 서로 다른 3개에서 12개를 택하는 중복조합이므로

${}_3H_{12}={}_{3+12-1}C_{12}$

$={}_{14}C_{12}={}_{14}C_2=91$(가지)

2 모든 사람이 사과 또는 배를 적어도 한 개씩 받아야 하므로 먼저 사과 또는 배를 한 개씩 세 사람에게 나누어 준다.

세 사람에게 먼저 주는 과일	나머지 과일을 나누어 주는 경우
사과 3개 ⇒ 1가지	${}_3H_2\times{}_3H_5$
사과 2개, 배 1개 ⇒ ${}_3C_2$	${}_3H_3\times{}_3H_4$
사과 1개, 배 2개 ⇒ ${}_3C_1$	${}_3H_4\times{}_3H_3$
배 3개 ⇒ 1가지	${}_3H_5\times{}_3H_2$

따라서 구하는 경우의 수는

$1\times{}_3H_2\times{}_3H_5+{}_3C_2\times{}_3H_3\times{}_3H_4$

$+{}_3C_1\times{}_3H_4\times{}_3H_3+1\times{}_3H_5\times{}_3H_2$

$=1\times{}_4C_2\times{}_7C_5+3\times{}_5C_3\times{}_6C_4$

$+3\times{}_6C_4\times{}_5C_3+1\times{}_7C_5\times{}_4C_2$

$=126+450+450+126$

$=1152$(가지)

3 (1) 예를 들어 방정식 $x+y+z=10$의 음이 아닌 정수해 중에서 $x=2$, $y=3$, $z=5$는 x를 2개, y를 3개, z를 5개 택하는 것으로 생각하자.

이때, 구하는 해의 개수는 x, y, z에서 10개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_{10}={}_{3+10-1}C_{10}={}_{12}C_{10}={}_{12}C_2=66$(개)

(2) $x=x'+1$, $y=y'+1$, $z=z'+1$(x', y', z'은 음이 아닌 정수)로 놓으면 $x+y+z=10$에서

$x'+y'+z'=7$ …… ㉠

구하는 해의 개수는 ㉠의 음이 아닌 정수해의 개수를 구하는 것과 같으므로

${}_3H_7={}_{3+7-1}C_7={}_9C_7={}_9C_2=36$(개)

(3) $x=x''+1$, $y=y''+2$, $z=z''+3$ (x'', y'', z''은 음이 아닌 정수)으로 놓으면 $x+y+z=10$에서

$x''+y''+z''=4$ …… ㉠

구하는 해의 개수는 ㉠의 음이 아닌 정수해의 개수를 구하는 것과 같으므로

${}_3H_4={}_{3+4-1}C_4={}_6C_4={}_6C_2=15$(개)

4 부호의 변화가 네 번 생기는 경우는 다음과 같이 두 가지로 생각할 수 있다.

(i) '+'가 맨 앞에 오는 경우

'+' 구역	'−' 구역	'+' 구역	'−' 구역	'+' 구역

이때, 각 구역에 적어도 1개의 부호는 들어가야 한다.

각 '+' 구역에 '+'를 1개씩 배열하고 남은 3개를 3곳에 배열하는 경우는 서로 다른 3개에서 3개를 택하는 중복조합이므로

${}_3H_3={}_{3+3-1}C_3={}_5C_3=10$(가지)

또 각 '−' 구역에 '−'를 1개씩 배열하고 남은 6개를 2곳에 배열하는 경우는 서로 다른 2개에서 6개를 택하는 중복조합이므로

${}_2H_6={}_{2+6-1}C_6={}_7C_6={}_7C_1=7$(가지)

따라서 구하는 경우의 수는

$10\times7=70$(가지)

(ii) '−'가 맨 앞에 오는 경우

'−' 구역	'+' 구역	'−' 구역	'+' 구역	'−' 구역

각 '+' 구역에 '+'를 1개씩 배열하고 남은 4개를 2곳에 배열하는 경우는 서로 다른 2개에서 4개를 택하는 중복조합이므로

${}_2H_4={}_{2+4-1}C_4={}_5C_4={}_5C_1=5$(가지)

또 각 '−' 구역에 '−'를 1개씩 배열하고 남은 5개를 3곳에 배열하는 경우는 서로 다른 3개에서 5개를 택하는 중복조합이므로

${}_3H_5={}_{3+5-1}C_5={}_7C_5={}_7C_2=21$(가지)

따라서 구하는 경우의 수는

$5\times21=105$(가지)

(i), (ii)에 의하여 구하는 경우의 수는

$70+105=175$(가지)

5 (1) 집합 B의 원소 5개 중에서 3개를 택하면 주어진 조건을 만족하는 함수 하나가 결정된다.

따라서 구하는 함수를 만드는 경우의 수는

${}_{5}C_{3}=10$(가지)

(2) 집합 B의 원소 5개 중에서 3개를 택하는 중복조합이므로

${}_{5}H_{3}={}_{5+3-1}C_{3}={}_{7}C_{3}=35$(가지)

3. 이항정리

바탕 다지기 / P. 71

| 스스로 하기 |

1 (1) 8, 24, 32, 16 (2) 10, 40, 80, 80

2 1, 15, 15

1 $(x+y)^{10}$의 전개식의 일반항은

${}_{10}C_{r}x^{10-r}y^{r}$ (단, $r=0, 1, 2, \cdots, 10$)

x^5y^5의 계수는 $r=5$일 때이므로

${}_{10}C_{5}=252$

2 ${}_{n}C_{0}+{}_{n}C_{1}+{}_{n}C_{2}+\cdots+{}_{n}C_{n}=2^n$이므로

$2^n=256=2^8 \qquad \therefore n=8$

기본 익히기 / P. 72

1 $\left(ax-\dfrac{1}{x}\right)^5$의 전개식의 일반항은

$${}_{5}C_{r}(ax)^{5-r}\left(-\frac{1}{x}\right)^r={}_{5}C_{r}a^{5-r}(-1)^r x^{5-2r}$$

(단, $r=0, 1, 2, \cdots, 5$)

x^3의 계수는 $5-2r=3$에서 $r=1$일 때이고, x^3의 계수가 -80이므로

${}_{5}C_{1}a^4(-1)=-{}_{5}C_{1}a^4=-80$

$5a^4=80,\ a^4=16$

$\therefore a=-2$ 또는 $a=2$

2 (1) $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^6$의 전개식의 일반항은

$${}_{6}C_{r}x^{6-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r={}_{6}C_{r}x^{6-2r} \text{ (단, } r=0, 1, 2, \cdots, 6)$$

상수항은 $6-2r=0$에서 $r=3$일 때이므로

${}_{6}C_{3}=20$

(2) $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^8$의 전개식의 일반항은

$${}_{8}C_{r}x^{8-r}\left(-\frac{1}{x}\right)^r={}_{8}C_{r}(-1)^r x^{8-2r}$$

(단, $r=0, 1, 2, \cdots, 8$)

$(x^2+1)\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^8$의 전개식에서 상수항이려면

$\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^8$의 전개식에서 x^{-2}항 또는 상수항이어야 하므로

(i) $8-2r=-2$, 즉 $r=5$일 때

${}_{8}C_{5}(-1)^5=-{}_{8}C_{3}=-56$

(ii) $8-2r=0$, 즉 $r=4$일 때

${}_{8}C_{4}(-1)^4=70$

(i), (ii)에서

$-56+70=14$

3 ${}_{n}C_{1}+{}_{n}C_{2}+{}_{n}C_{3}+\cdots+{}_{n}C_{n}=2^n-1$이고,

$2^{11}=2048,\ 2^{12}=4096$이므로

$2^{11}\le 2^n-1<2^{12}$

$2^{11}+1\le 2^n<2^{12}+1 \qquad \therefore n=12$

4 $(1+x)^{10}$을 전개하면

$(1+x)^{10}={}_{10}C_{0}+{}_{10}C_{1}x+{}_{10}C_{2}x^2+\cdots+{}_{10}C_{10}x^{10}$

이 등식의 양변에 $x=2$를 대입하면

${}_{10}C_{0}+2{}_{10}C_{1}+2^2{}_{10}C_{2}+\cdots+2^{10}{}_{10}C_{10}=3^{10}=59049$

5 (1) $\log_2({}_{99}C_{0}+{}_{99}C_{1}+{}_{99}C_{2}+\cdots+{}_{99}C_{99})$

$=\log_2 2^{99}=99$

(2) ${}_{49}C_{1}+{}_{49}C_{3}+{}_{49}C_{5}+\cdots+{}_{49}C_{49}=2^{49-1}=2^{48}$

$\therefore \log_2({}_{49}C_{1}+{}_{49}C_{3}+{}_{49}C_{5}+\cdots+{}_{49}C_{49})$

$=\log_2 2^{48}=48$

6 집합 A의 부분집합 중 원소의 개수가 n개인 부분집합의 개수는

${}_{15}C_{n}$

따라서 원소의 개수가 홀수인 부분집합의 개수는

${}_{15}C_{1}+{}_{15}C_{3}+{}_{15}C_{5}+\cdots+{}_{15}C_{15}$

$=2^{15-1}=2^{14}=16384$(개)

실력 키우기 / P. 73

1 (1) $(1+x)^3$의 전개식의 일반항은

${}_{3}C_{a}x^{a}$ (단, $a=0, 1, 2, 3$)

$(2+x)^4$의 전개식의 일반항은

${}_{4}C_{b}\,2^{4-b}x^{b}$ (단, $b=0, 1, 2, 3, 4$)

$(1+x)^3(2+x)^4$의 전개식에서 x의 계수는

(i) $a=0,\ b=1$일 때

${}_{3}C_{0}\times{}_{4}C_{1}\cdot 2^3=32$

(ii) $a=1,\ b=0$일 때

${}_{3}C_{1}\times{}_{4}C_{0}\cdot 2^4=48$

(i), (ii)에서

$32+48=80$

(2) 주어진 식의 전개식에서 x^2의 계수는 $(1+x)^r$에서 $2\le r\le 10$일 때 ${}_rC_2$의 합이므로

$${}_2C_2+{}_3C_2+{}_4C_2+\cdots+{}_{10}C_2$$
$$=\frac{2\times1}{2}+\frac{3\times2}{2}+\frac{4\times3}{2}+\cdots+\frac{10\times9}{2}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{9}(k+1)k$$
$$=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{9}k^2+\sum_{k=1}^{9}k\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{9\times10\times19}{6}+\frac{9\times10}{2}\right)=165$$

2 $21^{21}=(20+1)^{21}$

$$={}_{21}C_0\cdot20^{21}+{}_{21}C_1\cdot20^{20}+{}_{21}C_2\cdot20^{19}+\cdots$$
$$+{}_{21}C_{18}\cdot20^3+{}_{21}C_{19}\cdot20^2+{}_{21}C_{20}\cdot20+{}_{21}C_{21}$$

이때, ${}_{21}C_0\cdot20^{21}+\cdots+{}_{21}C_{19}\cdot20^2$은 1000의 배수이므로 나머지는

${}_{21}C_{20}\cdot20+{}_{21}C_{21}=21\times20+1=421$

3 $a_n=\left(1+\frac{1}{3}\right)^n=\left(\frac{4}{3}\right)^n$이므로

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3}{4}\right)^k=\frac{\frac{3}{4}\left\{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right\}}{1-\frac{3}{4}}$$
$$=3\left\{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right\}$$

4 $(1+x)^n$을 전개하면

$$(1+x)^n={}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+{}_nC_3x^3+\cdots+{}_nC_nx^n$$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$n(1+x)^{n-1}={}_nC_1+2{}_nC_2x+3{}_nC_3x^2+\cdots+n{}_nC_nx^{n-1}$$

이 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

${}_nC_1+2{}_nC_2+3{}_nC_3+\cdots+n{}_nC_n=n\cdot2^{n-1}$

5 똑같은 상품과 서로 다른 상품이 각각 뽑히는 개수에 따른 경우의 수는 다음 표와 같다.

똑같은 상품	서로 다른 상품	경우의 수
10	0	${}_{21}C_0$
9	1	${}_{21}C_1$
8	2	${}_{21}C_2$
⋮	⋮	⋮
0	10	${}_{21}C_{10}$

따라서 구하는 경우의 수는

${}_{21}C_0+{}_{21}C_1+{}_{21}C_2+\cdots+{}_{21}C_{10}$

이때, ${}_{21}C_0+{}_{21}C_1+{}_{21}C_2+\cdots+{}_{21}C_{21}=2^{21}$이고,

${}_{21}C_{11}={}_{21}C_{10}$, ${}_{21}C_{12}={}_{21}C_9$, $\cdots$, ${}_{21}C_{21}={}_{21}C_0$이므로

$${}_{21}C_0+{}_{21}C_1+{}_{21}C_2+\cdots+{}_{21}C_{21}$$
$$=2({}_{21}C_0+{}_{21}C_1+{}_{21}C_2+\cdots+{}_{21}C_{10})=2^{21}$$

$\therefore {}_{21}C_0+{}_{21}C_1+{}_{21}C_2+\cdots+{}_{21}C_{10}=2^{20}$(가지)

6 $f(n)$은 a_1을 제외한 나머지 9개에서 $(n-1)$개를 택하는 조합이므로

$f(n)={}_9C_{n-1}$

$\therefore f(2)+f(4)+f(6)+f(8)+f(10)$
$$={}_9C_1+{}_9C_3+{}_9C_5+{}_9C_7+{}_9C_9$$
$$=2^{9-1}=2^8=256$$

대단원 확인하기 P. 74, 75

1 서로 다른 2개에서 3개를 택하여 배열하는 중복순열이므로

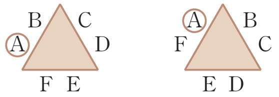
${}_2\Pi_3=2^3=8$(가지)

괘를 만드는 경우를 모두 그리면

2 6명을 원형으로 배열하는 원순열의 수는

$(6-1)!=5!$

이때, 정삼각형 모양의 탁자에서는 원형으로 배열하는 한 가지 방법에 대하여 다음 그림과 같이 서로 다른 경우가 2가지씩 존재한다.



따라서 구하는 경우의 수는

$5!\times2=240$(가지)

3 (1) 2개의 0, 3개의 1, 1개의 2를 일렬로 배열하는 순열이므로

$$\frac{6!}{2!3!1!}=60\text{(가지)}$$

(2) (i) 1 □□□□□인 경우

$$\frac{5!}{2!2!1!}=30\text{(가지)}$$

(ii) 2 □□□□□인 경우

$\dfrac{5!}{2!3!}=10$(가지)

(i), (ii)에서

$30+10=40$(가지)

| **다른 풀이** |

6개를 일렬로 배열한 경우에서 0으로 시작하는 경우를 제외하면 되므로

$\dfrac{6!}{2!3!1!}-\dfrac{5!}{3!1!1!}=60-20=40$(가지)

4 2개의 A, 3개의 B, 3개의 C를 배열하는 순열이므로

$\dfrac{8!}{2!3!3!}=560$(가지)

5 (1) $\dfrac{9!}{6!3!}=84$(가지)

(2) A 지점에서 B 지점으로 가는 모든 경우에서 도로 PQ를 반드시 지나는 경우를 제외하면 된다.

(i) A 지점에서 P 지점으로 가는 경우

$\dfrac{5!}{4!1!}=5$(가지)

(ii) P 지점에서 Q 지점으로 가는 경우

1가지

(iii) Q 지점에서 B 지점으로 가는 경우

$\dfrac{3!}{2!1!}=3$(가지)

(i), (ii), (iii)에 의해 도로 PQ를 반드시 지나는 경우의 수는

$5\times1\times3=15$(가지)

따라서 구하는 경우의 수는

$84-15=69$(가지)

6 세 명이 적어도 한 권의 공책을 받아야 하므로 먼저 세 명에게 공책 한 권씩을 나누어 준다. 이때, 남은 공책 5권을 세 명에게 나누어 주는 경우는 서로 다른 3개에서 5개를 택하는 중복조합이므로

${}_3H_5={}_{3+5-1}C_5={}_7C_5={}_7C_2=21$(가지)

7 (1) 주어진 조건을 만족하는 함수는 일대일 대응이므로 집합 X의 원소 5개를 일렬로 배열하는 경우와 같다.

따라서 구하는 함수의 개수는

$5\times4\times3\times2\times1=120$(개)

(2) 집합 X의 원소 5개에서 5개를 택하는 중복조합이므로

${}_5H_5={}_{5+5-1}C_5={}_9C_5={}_9C_4=126$(개)

8 $(x+1)^5$의 전개식의 일반항은

${}_5C_a x^a$ (단, $a=0, 1, 2, \cdots, 5$)

$(3x-2)^4$의 전개식의 일반항은

${}_4C_b(3x)^b(-2)^{4-b}={}_4C_b 3^b(-2)^{4-b}x^b$

(단, $b=0, 1, 2, 3, 4$)

$(x+1)^5(3x-2)^4$의 전개식에서 x^2의 계수는

(i) $a=2$, $b=0$일 때

${}_5C_2\times{}_4C_0\cdot3^0(-2)^4=160$

(ii) $a=1$, $b=1$일 때

${}_5C_1\times{}_4C_1\cdot3(-2)^3=-480$

(iii) $a=0$, $b=2$일 때

${}_5C_0\times{}_4C_2\cdot3^2(-2)^2=216$

(i), (ii), (iii)에서

$160-480+216=-104$

9 ${}_nC_1+{}_nC_2+{}_nC_3+\cdots+{}_nC_n=2^n-1$이고,

$2^8=256$, $2^9=512$, $2^{10}=1024$이므로

$500<2^n-1<1000$

$501<2^n<1001$

$\therefore n=9$

10 (1) $(1+x)^{2n}$을 전개하면

$$(1+x)^{2n}={}_{2n}C_0+{}_{2n}C_1\,x+{}_{2n}C_2\,x^2+{}_{2n}C_3\,x^3+\cdots+{}_{2n}C_{2n}\,x^{2n} \qquad \cdots ㉠$$

이 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$0={}_{2n}C_0-{}_{2n}C_1+{}_{2n}C_2-{}_{2n}C_3+\cdots+{}_{2n}C_{2n}$

$\therefore {}_{2n}C_0+{}_{2n}C_2+\cdots+{}_{2n}C_{2n}$

$={}_{2n}C_1+{}_{2n}C_3+\cdots+{}_{2n}C_{2n-1}$

한편 ㉠에서 양변에 $x=1$을 대입하면

$2^{2n}={}_{2n}C_0+{}_{2n}C_1+{}_{2n}C_2+\cdots+{}_{2n}C_{2n}$

$\therefore {}_{2n}C_0+{}_{2n}C_2+\cdots+{}_{2n}C_{2n}$

$={}_{2n}C_1+{}_{2n}C_3+\cdots+{}_{2n}C_{2n-1}=2^{2n-1}$

(2) $(1+x)^n$의 전개식을 다음 두 가지로 쓸 수 있다.

${}_nC_0+{}_nC_1\,x+{}_nC_2\,x^2+\cdots+{}_nC_n\,x^n \qquad \cdots ㉠$

${}_nC_n+{}_nC_{n-1}\,x+{}_nC_{n-2}\,x^2+\cdots+{}_nC_0\,x^n \qquad \cdots ㉡$

이때, ㉠과 ㉡을 곱하면

$(1+x)^{2n}$

$=({}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots+{}_nC_nx^n)$

$\times({}_nC_n+{}_nC_{n-1}\,x+{}_nC_{n-2}\,x^2+\cdots+{}_nC_0x^n)$

양변의 x^n의 계수를 비교하면

${}_{2n}C_n={}_nC_0{}^2+{}_nC_1{}^2+{}_nC_2{}^2+\cdots+{}_nC_n{}^2$

$\therefore {}_nC_0{}^2+{}_nC_1{}^2+{}_nC_2{}^2+\cdots+{}_nC_n{}^2$

$={}_{2n}C_n=\dfrac{(2n)!}{n!n!}$

Ⅲ. 확률

1. 확률의 뜻과 활용

확률의 뜻과 활용에 들어가기 전에 / P.79

1 (1) $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$
$=5+4-3=6$
(2) $n(A^C)=n(U)-n(A)=10-5=5$

2 11의 배수가 나오는 경우의 수는
9가지
13의 배수가 나오는 경우의 수는
7가지
11과 13의 공배수가 나오는 경우의 수는
0가지
따라서 구하는 경우의 수는
$9+7=16$(가지)

3 주사위 1개에서 1, 2, 3, 4, 5, 6의 6가지, 동전 1개에서 앞면, 뒷면의 2가지가 나오므로 구하는 경우의 수는
$6\times2=12$(가지)

4 서로 다른 4개에서 3개를 택하는 순열이므로
${}_4P_3=4\times3\times2=24$(가지)

5 ${}_nC_6={}_nC_8$이므로
$8=n-6 \qquad \therefore n=14$

1. 확률의 뜻과 기본 성질

바탕 다지기 / P. 81

| 스스로 하기 |

1 7, 7

2 285, $\frac{57}{100}$, $\frac{57}{100}$

1 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는
$6\times6=36$(가지)
두 눈의 수의 곱이 홀수가 되려면 두 주사위에서 모두 홀수의 눈이 나와야 하므로 그 경우의 수는
$3\times3=9$(가지)
따라서 구하는 확률은
$\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$

2 전체 7송이 중에서 2송이를 뽑는 경우의 수는
${}_7C_2=21$(가지)
빨간색 장미꽃 4송이 중에서 1송이를 뽑고, 노란색 장미꽃 3송이 중에서 1송이를 뽑는 경우의 수는
${}_4C_1\times{}_3C_1=12$(가지)
따라서 구하는 확률은
$\frac{12}{21}=\frac{4}{7}$

기본 익히기 / P. 82

1 (1) $\frac{{}_6C_1}{{}_{10}C_1}=\frac{3}{5}$
(2) $\frac{{}_4C_1}{{}_{10}C_1}=\frac{2}{5}$
(3) 검은 공이 없으므로 구하는 확률은 0이다.
(4) 반드시 일어나는 사건이므로 구하는 확률은 1이다.

2 전체 10개 중에서 4개를 꺼내는 경우의 수는
${}_{10}C_4=210$(가지)
쌀강정 7개 중에서 2개, 보리강정 3개 중에서 2개를 꺼내는 경우의 수는
${}_7C_2\times{}_3C_2=63$(가지)
따라서 구하는 확률은
$\frac{63}{210}=\frac{3}{10}$

3 5권의 책을 책꽂이에 일렬로 꽂는 경우의 수는
$5!=120$(가지)
(1) 소설책이 왼쪽 끝에 오는 경우의 수는
$4!=24$(가지)
따라서 구하는 확률은
$\frac{24}{120}=\frac{1}{5}$
(2) 소설책, 수필집, 시집을 한 묶음으로 생각하여 3권을 일렬로 배열하는 경우의 수는
$3!=6$(가지)
이들 각각에 대하여 소설책, 수필집, 시집이 자리를 바꾸는 경우의 수는
$3!=6$(가지)
소설책, 수필집, 시집이 이웃하여 5권을 일렬로 배열하는 경우의 수는
$6\times6=36$(가지)

따라서 구하는 확률은

$\frac{36}{120}=\frac{3}{10}$

(3) 음악책과 미술책이 양쪽 끝에 오는 경우의 수는

$2!=2$(가지)

이들 각각에 대하여 소설책, 수필집, 시집을 일렬로 배열하는 경우의 수는

$3!=6$(가지)

음악책과 미술책을 양쪽 끝에 꽂아 5권을 일렬로 배열하는 경우의 수는

$2\times6=12$(가지)

따라서 구하는 확률은

$\frac{12}{120}=\frac{1}{10}$

4 전체 10개의 CD 중에서 4개의 CD를 꺼내는 경우의 수는

${}_{10}C_4$가지

4개가 모두 공CD인 경우의 수는

${}_{n}C_4$가지

이때, 4개 모두 공CD를 꺼낼 확률이 $\frac{1}{14}$이므로

$\frac{{}_{n}C_4}{{}_{10}C_4}=\frac{1}{14}$

$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{10\times9\times8\times7}=\frac{1}{14}$

$n(n-1)(n-2)(n-3)=6\times5\times4\times3$

$\therefore n=6$

5 타율은 $\frac{(\text{안타 수})}{(\text{타석 수})}$이므로 이 선수가 이번 시즌에 칠 수 있는 안타의 개수를 n이라고 하면

$0.305=\frac{n}{200}$ $\quad\therefore n=0.305\times200=61$(개)

실력 키우기 / P. 83

1 집합 A의 부분집합의 개수는

2^4개

원소 2가 속해 있는 부분집합의 개수는

$2^{4-1}=2^3$(개)

따라서 구하는 확률은

$\frac{2^3}{2^4}=\frac{1}{2}$

2 주사위 한 개를 두 번 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는

$6\times6=36$(가지)

이차방정식 $x^2+ax+b=0$이 중근을 가지려면 판별식 $D=a^2-4b=0$이어야 하므로

$a^2=4b$

$a=1$일 때, $1=4b$인 b는 없다.

$a=2$일 때, $4=4b$인 b는 1이다.

$a=3$일 때, $9=4b$인 b는 없다.

$a=4$일 때, $16=4b$인 b는 4이다.

$a=5$일 때, $25=4b$인 b는 없다.

$a=6$일 때, $36=4b$인 b는 없다.

즉, 중근을 갖는 경우의 수는

2가지

따라서 구하는 확률은

$\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$

3 여섯 개의 숫자 중에서 서로 다른 네 개의 숫자를 택하여 네 자리 정수를 만드는 경우의 수는

${}_6P_4=360$(가지)

이 중 3400보다 큰 경우는

34□□: ${}_4P_2=12$(가지)

35□□: ${}_4P_2=12$(가지)

36□□: ${}_4P_2=12$(가지)

4□□□: ${}_5P_3=60$(가지)

5□□□: ${}_5P_3=60$(가지)

6□□□: ${}_5P_3=60$(가지)

이므로 그 경우의 수는

$12\times3+60\times3=216$(가지)

따라서 구하는 확률은

$\frac{216}{360}=\frac{3}{5}$

4 10개의 공 중에서 4개의 공을 꺼내는 경우의 수는

${}_{10}C_4=210$(가지)

이 중에서 8이 적힌 공이 최댓값이 되는 경우는 1에서 7까지 적힌 공 중에서 3개, 8이 적힌 공 1개를 꺼내는 경우이므로

${}_7C_3=35$(가지)

따라서 구하는 확률은

$\frac{35}{210}=\frac{1}{6}$

5 흰 공의 개수를 n이라고 하자. 이때, 3개의 공이 모두 흰 공이 나올 확률이 $\frac{1}{6}$이므로

$\frac{{}_{n}C_3}{{}_{10}C_3}=\frac{1}{6}$
$n(n-1)(n-2)=120=6\times5\times4$
$\therefore n=6$

2. 확률의 계산과 활용

바탕 다지기 / P. 87

| 스스로 하기 |

1 0.2, 0.7

2 $\frac{7}{24}$, $\frac{7}{24}$, $\frac{17}{24}$

1 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는
$6\times6=36$(가지)
나오는 눈의 수의 합이 3의 배수인 경우는
(1, 2), (2, 1), (1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1), (3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3), (6, 6)
의 12가지이므로 그 확률은
$\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$
나오는 눈의 수의 합이 4의 배수인 경우는
(1, 3), (2, 2), (3, 1), (2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2), (6, 6)
의 9가지이므로 그 확률은
$\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$
눈의 수의 합이 3의 배수가 되는 사건을 A, 눈의 수의 합이 4의 배수가 되는 사건을 B라고 하면
$P(A)=\frac{1}{3}$
$P(B)=\frac{1}{4}$
$P(A\cap B)=\frac{1}{36}$
따라서 구하는 확률은
$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$
$=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{36}=\frac{5}{9}$

2 전체 10명 중에서 청소 당번 3명을 뽑는 경우의 수는
${}_{10}C_3$가지
3명이 모두 남학생일 사건을 A, 3명이 모두 여학생일 사건을 B로 놓으면 A, B는 서로 배반사건이다.
따라서 구하는 확률은
$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$
$=\frac{{}_{6}C_3}{{}_{10}C_3}+\frac{{}_{4}C_3}{{}_{10}C_3}$
$=\frac{1}{5}$

기본 익히기 / P. 88

1 $P(A^C)=0.4$이므로
$P(A)=1-P(A^C)$
$=1-0.4=0.6$
$P(B^C)=0.3$이므로
$P(B)=1-P(B^C)$
$=1-0.3=0.7$
$\therefore P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)$
$=0.6+0.7-0.95$
$=0.35$

2 30장의 복권 중에서 2장을 고르는 경우의 수는
${}_{30}C_2=435$(가지)
(1) 당첨 복권이 1장도 나오지 않을 경우의 수는
${}_{14}C_2=91$(가지)
따라서 구하는 확률은
$\frac{{}_{14}C_2}{{}_{30}C_2}=\frac{91}{435}$
(2) 고른 두 장의 복권 중 적어도 1장은 당첨 복권이 나올 사건을 A라고 하면 A^C은 당첨 복권이 1장도 나오지 않을 사건이므로
$P(A^C)=\frac{91}{435}$
따라서 구하는 확률은
$P(A)=1-P(A^C)$
$=1-\frac{91}{435}=\frac{344}{435}$

3 한 개의 주사위를 두 번 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는
$6\times6=36$(가지)
두 눈의 수의 합 중에서 12와 서로소인 것은
5, 7, 11
(i) 두 눈의 수의 합이 5인 경우는
(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)
의 4가지이므로 그 확률은

$\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$

(ii) 두 눈의 수의 합이 7인 경우는

$(1,\ 6), (2,\ 5), (3,\ 4), (4,\ 3), (5,\ 2), (6,\ 1)$

의 6가지이므로 그 확률은

$\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

(iii) 두 눈의 수의 합이 11인 경우는

$(5,\ 6), (6,\ 5)$

의 2가지이므로 그 확률은

$\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$

(i), (ii), (iii)의 사건은 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$\frac{1}{9}+\frac{1}{6}+\frac{1}{18}=\frac{1}{3}$

4 전체 15명의 학생 중에서 3명의 대표를 선발하는 경우의 수는

${}_{15}C_3=455$(가지)

선발될 대표가 모두 같은 학년일 경우는 모두 1학년이거나 모두 2학년이거나 모두 3학년일 경우이다.

이때, 3명의 대표가 모두 1학년일 사건을 A, 모두 2학년일 사건을 B, 모두 3학년일 사건을 C라고 하면 사건 A, B, C는 서로 배반사건이므로

$\mathrm{P}(A\cup B\cup C)$

$=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(C)$

$=\frac{{}_4C_3}{{}_{15}C_3}+\frac{{}_5C_3}{{}_{15}C_3}+\frac{{}_6C_3}{{}_{15}C_3}$

$=\frac{4}{455}+\frac{10}{455}+\frac{20}{455}$

$=\frac{34}{455}$

5 10개의 제비 중에서 3개의 제비를 뽑는 경우의 수는

${}_{10}C_3=120$(가지)

당첨 제비가 아닌 제비를 n개라고 하자. 이때, 10개의 제비 중에서 적어도 1개의 당첨 제비를 뽑을 사건을 A라고 하면 A^C은 당첨 제비를 1개도 뽑지 않을 사건이므로

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{{}_nC_3}{{}_{10}C_3}=\frac{29}{30}$

$\frac{{}_nC_3}{{}_{10}C_3}=\frac{1}{30}$

$n(n-1)(n-2)=4\times3\times2$

$\therefore n=4$

따라서 당첨 제비는 6개이다.

실력 키우기 / P. 89

1 전체 7개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

${}_7C_3=35$(개)

직선 l 위의 점에서 2개, 직선 m 위의 점에서 1개를 택하는 사건을 A, 직선 m 위의 점에서 2개, 직선 l 위의 점에서 1개를 택하는 사건을 B라고 하면 A, B는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B)$

$=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$

$=\frac{{}_3C_2\times{}_4C_1}{{}_7C_3}+\frac{{}_4C_2\times{}_3C_1}{{}_7C_3}$

$=\frac{12}{35}+\frac{18}{35}$

$=\frac{6}{7}$

2 집합 A의 부분집합은 16개이므로 이 중에서 임의로 서로 다른 두 집합을 택하는 경우의 수는

${}_{16}C_2=120$(가지)

선택한 두 집합을 X, Y라고 하자.

이때, $n(X)\le n(Y)$가 되도록 한다.

한 집합이 다른 집합의 진부분집합이 되는 경우는 $X\subset Y$이고 $X\neq Y$인 경우이므로

(i) $n(Y)=4$일 때

$\frac{{}_4C_4(2^4-1)}{{}_{16}C_2}=\frac{1}{8}$

(ii) $n(Y)=3$일 때

$\frac{{}_4C_3(2^3-1)}{{}_{16}C_2}=\frac{7}{30}$

(iii) $n(Y)=2$일 때

$\frac{{}_4C_2(2^2-1)}{{}_{16}C_2}=\frac{3}{20}$

(iv) $n(Y)=1$일 때

$\frac{{}_4C_1(2-1)}{{}_{16}C_2}=\frac{1}{30}$

(i)~(iv)의 사건은 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$\frac{1}{8}+\frac{7}{30}+\frac{3}{20}+\frac{1}{30}=\frac{13}{24}$

3 한 개의 주사위를 두 번 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는

$6\times6=36$(가지)

$\frac{b}{a}\le2$이므로 $2a\ge b$

(i) $a=1$일 때, $b=1$, 2이므로 그 확률은

$\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$

(ⅱ) $a=2$일 때, $b=1, 2, 3, 4$이므로 그 확률은

$\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$

(ⅲ) $a=3$일 때, $b=1, 2, 3, 4, 5, 6$이므로 그 확률은

$\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

(ⅳ) $a=4$일 때, $b=1, 2, 3, 4, 5, 6$이므로 그 확률은

$\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

(ⅴ) $a=5$일 때, $b=1, 2, 3, 4, 5, 6$이므로 그 확률은

$\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

(ⅵ) $a=6$일 때, $b=1, 2, 3, 4, 5, 6$이므로 그 확률은

$\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

(ⅰ)~(ⅵ)의 사건은 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$\frac{1}{18}+\frac{1}{9}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$

4 한 개의 주사위를 세 번 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는

$6\times6\times6=216$(가지)

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라고 하면 모든 실수 x에 대하여 이차부등식

$ax^2+bx+c>0$이 성립할 조건은

$D=b^2-4ac<0 \qquad \therefore ac>\frac{b^2}{4}$

$ac>\frac{b^2}{4}$일 사건을 A라고 하면 $ac\le\frac{b^2}{4}$일 사건은

A^C이고, b의 값에 따라 $ac\le\frac{b^2}{4}$을 만족하는 a, c의 순서쌍 $(a,\ c)$는 다음과 같다.

(ⅰ) $b=2$일 때, $ac\le1$이므로

(1, 1)의

1가지

(ⅱ) $b=3$일 때, $ac\le\frac{9}{4}$이므로

(1, 1), (1, 2), (2, 1)

의 3가지

(ⅲ) $b=4$일 때, $ac\le4$이므로

(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (4, 1)

의 8가지

(ⅳ) $b=5$일 때, $ac\le\frac{25}{4}$이므로

(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (5, 1), (6, 1)

의 14가지

(ⅴ) $b=6$일 때, $ac\le9$이므로

(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 2), (5, 1), (6, 1)

의 17가지

(ⅰ)~(ⅴ)에 의하여

$$\mathrm{P}(A^C)=\frac{1}{216}+\frac{3}{216}+\frac{8}{216}+\frac{14}{216}+\frac{17}{216}=\frac{43}{216}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{43}{216}=\frac{173}{216}$$

5 정육면체의 8개의 꼭짓점 중에서 두 점을 택하는 경우의 수는

${}_8\mathrm{C}_2=28$(가지)

두 점을 이은 선분의 길이가 $\frac{3}{2}$보다 작은 경우는 길이가 1이거나 $\sqrt{2}$인 경우이다.

길이가 1일 사건을 A, 길이가 $\sqrt{2}$일 사건을 B라고 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{12}{28}=\frac{3}{7}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{12}{28}=\frac{3}{7}$

이때, 두 사건 A, B는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{3}{7}+\frac{3}{7}=\frac{6}{7}$$

개념 넓히기 / P. 90

확인학습

1 선분 AB를 2:1로 내분하는 점을 C라고 하면 점 P가 선분 AC 위에 있을 때, $\overline{\mathrm{AP}}\le2\overline{\mathrm{BP}}$가 성립하므로

$$p=\frac{(\text{선분 AC의 길이})}{(\text{선분 AB의 길이})}=\frac{2}{3}$$

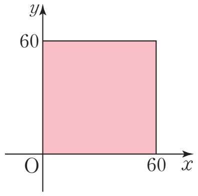
실생활 문제 해결하기 / P. 91

1단계 (1) $0 \leq x \leq 60$, $0 \leq y \leq 60$

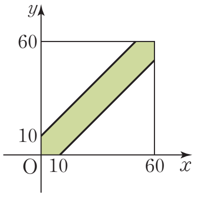
(2) B는 11시 20분에서 11시 40분까지 도착해야 한다.

(3) $|x-y| \leq 10$

2단계 (1)



(2)



3단계 (1) $60 \times 60 = 3600$

(2) $3600 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 50 \cdot 50 = 1100$

(3) $\frac{1100}{3600} = \frac{11}{36}$

2. 조건부확률

조건부확률에 들어가기 전에 / P.93

1 (1) $\{(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (1,\ 3),\ (1,\ 4),\ (1,\ 5),\ (1,\ 6),\ (2,\ 1),\ (2,\ 2),\ (2,\ 3),\ (2,\ 4),\ (2,\ 5),\ (2,\ 6),\ (3,\ 1),\ (3,\ 2),\ (3,\ 3),\ (3,\ 4),\ (3,\ 5),\ (3,\ 6),\ (4,\ 1),\ (4,\ 2),\ (4,\ 3),\ (4,\ 4),\ (4,\ 5),\ (4,\ 6),\ (5,\ 1),\ (5,\ 2),\ (5,\ 3),\ (5,\ 4),\ (5,\ 5),\ (5,\ 6),\ (6,\ 1),\ (6,\ 2),\ (6,\ 3),\ (6,\ 4),\ (6,\ 5),\ (6,\ 6)\}$

(2) ${}_{36}C_2 = \frac{36 \times 35}{2 \times 1} = 630$(개)

2 (1) 남자가 2명 뿐이므로 세 명 모두 남자가 뽑힐 확률은 0이다.

(2) 남자가 2명 뿐이므로 여자가 반드시 포함된다. 따라서 구하는 확률은 1이다.

(3) 남자를 1명, 여자를 2명 뽑으면 되므로 구하는 확률은

$$\frac{{}_2C_1 \times {}_3C_2}{{}_5C_3} = \frac{3}{5}$$

3 (1) 2의 배수는 10가지이므로 구하는 확률은

$$\frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

(2) 3의 배수는 6가지이므로 구하는 확률은

$$\frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

(3) 2의 배수인 사건을 A, 3의 배수인 사건을 B라고 하면

$$\mathrm{P}(A) = \frac{1}{2}$$

$$\mathrm{P}(B) = \frac{3}{10}$$

2의 배수이면서 3의 배수인 경우, 즉 6의 배수인 경우는 3가지이므로

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \frac{3}{20}$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A \cup B) &= \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{3}{10} - \frac{3}{20} \\ &= \frac{13}{20}\end{aligned}$$

4 5개의 과일 중 3개를 택하는 경우의 수는

${}_5C_3 = 10$(가지)

(1) 귤이 포함되는 경우의 수는

${}_4C_2 = 6$(가지)

따라서 구하는 확률은

$$\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

(2) 귤이 포함되는 사건을 A라고 하면 귤이 포함되지 않는 사건은 A^C이므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A^C) &= 1 - \mathrm{P}(A) \\ &= 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}\end{aligned}$$

1. 조건부확률과 확률의 곱셈정리

바탕 다지기 / P. 95

| 스스로 하기 |

1 2, 1, 1, $\frac{1}{2}$

2 0.08, 0.08, 0.92

1 $A\cap B=\{6\}$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{6}$

$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}$이므로

$\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

따라서 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이므로 두 사건 A, B는 서로 독립이다.

기본 익히기 / P. 96

1 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A|B)$

$=\frac{4}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{5}$

$\therefore \mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$

$=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{3}{5}}=\frac{1}{3}$

2 $A^C\cap B^C=(A\cup B)^C$이므로

$\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\mathrm{P}((A\cup B)^C)$

$=1-\mathrm{P}(A\cup B)$

$=0.2$

$\therefore \mathrm{P}(A\cup B)=0.8$

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cup B)$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=0.7+0.4-0.8$

$=0.3$

$\therefore \mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}$

$=\frac{0.3}{0.4}=\frac{3}{4}$

3 땅콩이 들어 있는 초콜릿을 먹을 사건을 A, 아몬드가 들어 있는 초콜릿을 먹을 사건을 B라고 하면 첫 번째에 땅콩이 들어 있는 초콜릿을 먹을 확률은

$\mathrm{P}(A)=\frac{6}{10}$

사건 A가 일어났다는 가정하에 두 번째에 아몬드가 들어 있는 초콜릿을 먹을 확률은

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{4}{9}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)$

$=\frac{6}{10}\times\frac{4}{9}=\frac{4}{15}$

4 1차 시험에 합격하는 사건을 A, 2차 시험에 합격하는 사건을 B라고 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{20}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{50}$

구하는 확률은 사건 A가 일어났을 때 사건 B가 일어날 확률이므로

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$

$=\frac{\frac{1}{50}}{\frac{1}{20}}=\frac{2}{5}$

5 $A=\{1,\ 3,\ 5\}$, $B=\{1,\ 2,\ 3\}$, $C=\{4,\ 5\}$이고, $A\cap B=\{1,\ 3\}$, $A\cap C=\{5\}$이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(C)=\frac{1}{3}$,

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{3}$, $\mathrm{P}(A\cap C)=\frac{1}{6}$

(1) $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)\neq\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

따라서 사건 A와 사건 B는 서로 종속이다.

(2) $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$이므로

$\mathrm{P}(A\cap C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C)$

따라서 사건 A와 사건 C는 서로 독립이다.

6 적어도 한 명이 치유될 사건을 A라고 하면 A^C은 한 명도 치유되지 않는 사건이므로

$\mathrm{P}(A^C)={}_4\mathrm{C}_4\left(\frac{2}{5}\right)^4=\frac{16}{625}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)$

$=1-\frac{16}{625}$

$=\frac{609}{625}$

실력 키우기 / P. 97

1 $\mathrm{P}(A|B)+\mathrm{P}(B|A)$

$=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}+\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$

$=\left\{\frac{1}{\mathrm{P}(B)}+\frac{1}{\mathrm{P}(A)}\right\}\mathrm{P}(A\cap B)$

$=(6+4)\mathrm{P}(A\cap B)$

$=10\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{1}{8}$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{1}{80}$

2 $\mathrm{P}(B^C)=\dfrac{2}{7}$이므로

$\mathrm{P}(B^C)=1-\mathrm{P}(B)=\dfrac{2}{7}$

$\therefore \mathrm{P}(B)=\dfrac{5}{7}$

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$\dfrac{6}{7}=\mathrm{P}(A)+\dfrac{5}{7}-\dfrac{5}{7}\mathrm{P}(A)$

$\dfrac{2}{7}\mathrm{P}(A)=\dfrac{1}{7}$

$\therefore \mathrm{P}(A)=\dfrac{1}{2}$

3 거짓말을 할 확률이 $\dfrac{3}{10}$인 증인에게 증거 한 가지를 보여 주었을 때, 다음과 같은 네 가지 경우가 있다.

(i) 참인 증거를 참이라고 말하는 경우

$\dfrac{3}{5}\times\dfrac{7}{10}=\dfrac{21}{50}$

(ii) 참인 증거를 거짓이라고 말하는 경우

$\dfrac{3}{5}\times\dfrac{3}{10}=\dfrac{9}{50}$

(iii) 거짓인 증거를 참이라고 말하는 경우

$\dfrac{2}{5}\times\dfrac{3}{10}=\dfrac{3}{25}$

(iv) 거짓인 증거를 거짓이라고 말하는 경우

$\dfrac{2}{5}\times\dfrac{7}{10}=\dfrac{7}{25}$

(i)~(iv)에 의하여 증거 한 가지를 보여 주었을 때, 참인 증거라고 대답할 확률은

$\dfrac{21}{50}+\dfrac{3}{25}=\dfrac{27}{50}$

4 문제를 읽지 않고 답을 선택하여 1문제를 맞힐 확률은 $\dfrac{1}{2}$이다.

이때, 시험에서 합격하려면 8문제 이상을 맞혀야 하므로 8문제 또는 9문제 또는 10문제를 맞혀야 한다.

따라서 구하는 확률은

${}_{10}\mathrm{C}_8\left(\dfrac{1}{2}\right)^8\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+{}_{10}\mathrm{C}_9\left(\dfrac{1}{2}\right)^9\cdot\dfrac{1}{2}+{}_{10}\mathrm{C}_{10}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{10}$

$=\dfrac{45}{2^{10}}+\dfrac{10}{2^{10}}+\dfrac{1}{2^{10}}=\dfrac{56}{2^{10}}=\dfrac{7}{128}$

5 (i) A 팀이 우승하는 경우

A 팀이 3번째 시합까지 2번을 이기고 4번째 시합에서 이기면 된다.

따라서 A 팀이 우승할 확률은

${}_3\mathrm{C}_2\left(\dfrac{3}{5}\right)^2\cdot\dfrac{2}{5}\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{162}{625}$

(ii) B 팀이 우승하는 경우

두 팀 A, B의 경기에서 A 팀의 승률이 $\dfrac{3}{5}$이므로 B 팀의 승률은 $\dfrac{2}{5}$이다. 이때, B 팀이 3번째 시합까지 2번을 이기고 4번째 시합에서 이기면 된다.

따라서 B 팀이 우승할 확률은

${}_3\mathrm{C}_2\left(\dfrac{2}{5}\right)^2\cdot\dfrac{3}{5}\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{72}{625}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$\dfrac{n}{m}=\dfrac{162}{625}+\dfrac{72}{625}=\dfrac{234}{625}$

$\therefore m+n=625+234=859$

대단원 확인하기 P. 98, 99

1 두 개의 주사위를 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는

$6\times6=36$(가지)

두 눈의 수의 합이 3이 되는 사건을 A, 두 눈의 수의 합이 4가 되는 사건을 B로 놓으면

(i) 사건 A의 경우는

$(1, 2), (2, 1)$

의 2가지이므로 그 확률은

$\dfrac{2}{36}=\dfrac{1}{18}$

(ii) 사건 B의 경우는

$(1, 3), (2, 2), (3, 1)$

의 3가지이므로 그 확률은

$\dfrac{3}{36}=\dfrac{1}{12}$

두 사건 A, B는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\dfrac{1}{18}+\dfrac{1}{12}=\dfrac{5}{36}$

2 B와 C의 시합에서 B가 이기는 경우와 C가 이기는 경우로 나누어 생각한다.

(i) B가 C를 이기고, A가 B를 이기는 경우

$\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{8}$

(ⅱ) C가 B를 이기고, A가 C를 이기는 경우

$\left(1-\frac{3}{4}\right)\times\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{16}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 확률은

$\frac{3}{8}+\frac{3}{16}=\frac{9}{16}$

3 두 명 중에서 적어도 한 명이 공을 넣을 사건을 A라고 하면 A^C은 한 명도 공을 넣지 못할 사건이므로

$\mathrm{P}(A^C)=0.1\times0.2=0.02$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A)&=1-\mathrm{P}(A^C)\\&=1-0.02\\&=0.98\end{aligned}$$

4 A 신문을 구독하는 사건을 A, B 신문을 구독하는 사건을 B라고 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{24}{40}=\frac{3}{5}$

$\mathrm{P}(B)=\frac{16}{40}=\frac{2}{5}$

A, B 어느 신문도 구독하지 않는 사건은 $(A\cup B)^C$ 이므로

$\mathrm{P}((A\cup B)^C)=1-\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{8}{40}=\frac{1}{5}$

$\therefore \mathrm{P}(A\cup B)=\frac{4}{5}$

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$이므로

$\frac{4}{5}=\frac{3}{5}+\frac{2}{5}-\mathrm{P}(A\cap B)$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{5}$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(B|A)&=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}\\&=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{3}{5}}=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

5 P에서 Q로 전류가 흐르는 경우는

P→ a→ c→ Q 또는 P→ b→ d→ Q이다.

전류가 P→ a→ c→ Q로 흐르는 사건을 A, 전류가 P→ b→ d→ Q로 흐르는 사건을 B라고 하면

$\mathrm{P}(A)=0.2\times0.4=0.08$

$\mathrm{P}(B)=0.3\times0.5=0.15$

이때, 스위치가 모두 닫혀 있는 경우는 $A\cap B$이고, 두 사건 A, B는 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=0.08\times0.15=0.012$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cup B)&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\\&=0.08+0.15-0.012\\&=0.218\end{aligned}$$

6 적어도 1개가 앞면이 나올 사건을 A라고 하면 A^C은 4개가 모두 뒷면이 나올 사건이므로

$\mathrm{P}(A^C)={}_4\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A)&=1-\mathrm{P}(A^C)\\&=1-\frac{1}{16}=\frac{15}{16}\end{aligned}$$

7 동전의 앞면을 H, 동전의 뒷면을 T로 나타내면 세 사건 A, B, C에 대하여 $A=\{\mathrm{HH},\ \mathrm{HT}\}$, $B=\{\mathrm{HH},\ \mathrm{TH}\}$, $C=\{\mathrm{HT},\ \mathrm{TH}\}$이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(C)=\frac{1}{2}$

$A\cap B=\{\mathrm{HH}\}$, $A\cap C=\{\mathrm{HT}\}$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{4}$, $\mathrm{P}(A\cap C)=\frac{1}{4}$

따라서 $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)$이므로 사건 A와 사건 B는 서로 독립이고,

$\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C)=\mathrm{P}(A\cap C)$이므로 사건 A와 사건 C도 서로 독립이다.

8 공을 한 개 꺼낼 때, 흰 공이 나올 확률은 $\frac{1}{3}$이다.

이때, 10회의 시행 중 흰 공이 8회 이하로 나오려면 전체에서 9회 나오는 경우와 10회 나오는 경우를 제외하면 되므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}&1-\left\{{}_{10}\mathrm{C}_9\left(\frac{1}{3}\right)^9\cdot\frac{2}{3}+{}_{10}\mathrm{C}_{10}\left(\frac{1}{3}\right)^{10}\right\}\\&=1-\frac{21}{3^{10}}\\&=1-\frac{7}{3^9}\end{aligned}$$

9 문제를 읽지 않고 답을 선택하여 1문제를 맞힐 확률은 $\frac{1}{5}$이다. 이때, 이 시험에서 합격하려면 9문제 또는 10문제를 맞혀야 한다.

따라서 구하는 확률은

${}_{10}\mathrm{C}_9\left(\frac{1}{5}\right)^9\cdot\frac{4}{5}+{}_{10}\mathrm{C}_{10}\left(\frac{1}{5}\right)^{10}=\frac{41}{5^{10}}$

Ⅳ. 통계

1. 확률분포

확률분포에 들어가기 전에 / P. 105

1 통화 시간의 평균 m은

$$m=\frac{83+78+93+73+88}{5}=\frac{415}{5}=83$$

통화 시간의 분산 σ^2은

$$\sigma^2=\frac{0+(-5)^2+10^2+(-10)^2+5^2}{5}=50$$

통화 시간의 표준편차 σ는

$\sigma=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$

2 (1) $p_1+p_2+\cdots+p_n=\sum_{k=1}^{n}p_k$

(2) ${}_nC_0q^n+{}_nC_1pq^{n-1}+{}_nC_2p^2q^{n-2}+\cdots+{}_nC_np^n$

$=\sum_{k=0}^{n}{}_nC_kp^kq^{n-k}$

3 $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k-m)^2$

$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k^2-2mx_k+m^2)$

$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k^2-\frac{2m}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k+m^2$

$=A-2m^2+m^2=A-m^2$

4 1회의 시행에서 앞면이 나올 확률이 $\frac{1}{2}$인 독립시행이다.

(1) 앞면이 2번 나올 확률은

${}_3C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$

(2) 앞면이 3번 나올 확률은

${}_3C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$

1. 확률변수와 확률분포

바탕 다지기 / P. 107

| 스스로 하기 |

1 $\{2, 4\}$, $\frac{1}{6}$

2 (1) k, 1　　(2) 1, $\frac{1}{4}$

1 확률변수 X가 가지는 값은 0, 1, 2이므로 각각의 확률을 구하면

$P(X=0)=\frac{{}_2C_0\times{}_4C_2}{{}_6C_2}=\frac{2}{5}$

$P(X=1)=\frac{{}_2C_1\times{}_4C_1}{{}_6C_2}=\frac{8}{15}$

$P(X=2)=\frac{{}_2C_2\times{}_4C_0}{{}_6C_2}=\frac{1}{15}$

따라서 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{15}$	1

$X\geq1$인 경우는 $X=1$일 때와 $X=2$일 때이므로 구하는 확률은

$P(X\geq1)=P(X=1)+P(X=2)$

$=\frac{8}{15}+\frac{1}{15}$

$=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$

기본 익히기 / P. 108

1 $2k+\frac{1}{4}+k+\frac{1}{4}=1$이므로

$3k+\frac{1}{2}=1$

$\therefore k=\frac{1}{6}$

이때, $2\leq X\leq3$인 경우는 $X=2$일 때와 $X=3$일 때이므로 구하는 확률은

$P(2\leq X\leq3)=P(X=2)+P(X=3)$

$=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{5}{12}$

2 서로 다른 세 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 눈의 수가 한 개도 짝수가 아닐 확률은 눈의 수가 모두 홀수가 나올 확률이므로

$P(X=0)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}=\frac{a}{8}$

$\therefore a=1$ ······ ㉠

$\frac{a}{8}+\frac{3}{8}+\frac{b}{8}+\frac{1}{8}=1$이므로

$a+b=4$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=1, b=3$

3 이산확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면

X	1	2	3	$\cdots$	10	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	k	$2k$	$3k$	$\cdots$	$10k$	1

이때, $k+2k+\cdots+10k=1$이므로

$(1+2+\cdots+10)k=1$

$55k=1$

$\therefore k=\dfrac{1}{55}$

4 (1) $f(x)$는 확률밀도함수이므로

$\int_0^3 f(x)dx=1$

$\int_0^3 kx\,dx=1$

$\left[\dfrac{k}{2}x^2\right]_0^3=\dfrac{9}{2}k-0=1$

$\therefore k=\dfrac{2}{9}$

(2) $\mathrm{P}(1\le X\le 2)$

$=\int_1^2 \dfrac{2}{9}x\,dx$

$=\left[\dfrac{1}{9}x^2\right]_1^2=\dfrac{4}{9}-\dfrac{1}{9}$

$=\dfrac{3}{9}=\dfrac{1}{3}$

(3) $\mathrm{P}\left(X\ge\dfrac{5}{2}\right)$

$=\mathrm{P}\left(\dfrac{5}{2}\le X\le 3\right)$

$=\int_{\frac{5}{2}}^3 \dfrac{2}{9}x\,dx$

$=\left[\dfrac{1}{9}x^2\right]_{\frac{5}{2}}^3$

$=1-\dfrac{25}{36}=\dfrac{11}{36}$

5 확률밀도함수 $f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는 1이므로

$\dfrac{1}{2}\times 5\times a=1$

$\therefore a=\dfrac{2}{5}$

이때, 확률밀도함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{15}x & (0\le x\le 3)\\ -\dfrac{1}{5}x+1 & (3\le x\le 5)\end{cases}$$

$\mathrm{P}(0\le X\le 3)=\int_0^3 \dfrac{2}{15}x\,dx=\dfrac{3}{5}$이므로

$b\le 3$

$\mathrm{P}(0\le X\le b)=\dfrac{1}{15}$이므로

$\int_0^b \dfrac{2}{15}x\,dx=\dfrac{1}{15}$

$\left[\dfrac{1}{15}x^2\right]_0^b=\dfrac{1}{15}b^2=\dfrac{1}{15}$

$\therefore b=1\ (\because b\ge 0)$

실력 키우기 / P. 109

1 이산확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면

X	1	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=i)$	p_1	p_2	p_3	p_4	1

확률 p_1, p_2, p_3, p_4가 이 순서로 공비가 $\dfrac{1}{2}$인 등비수열을 이루므로

$p_2=\dfrac{1}{2}p_1,\ p_3=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2p_1,\ p_4=\left(\dfrac{1}{2}\right)^3p_1$

이때, $p_1+p_2+p_3+p_4=1$이므로

$p_1+p_2+p_3+p_4$

$=p_1+\dfrac{1}{2}p_1+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2p_1+\left(\dfrac{1}{2}\right)^3p_1$

$=p_1+\dfrac{1}{2}p_1+\dfrac{1}{4}p_1+\dfrac{1}{8}p_1$

$=\dfrac{15}{8}p_1=1$

$\therefore p_1=\dfrac{8}{15}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(X=4)=p_4=\dfrac{1}{8}p_1$

$=\dfrac{1}{8}\times\dfrac{8}{15}$

$=\dfrac{1}{15}$

2 (1) 동전을 두 번 던질 때 나올 수 있는 경우는

(앞면, 앞면), (앞면, 뒷면),

(뒷면, 앞면), (뒷면, 뒷면)

이때, (앞면, 앞면)이 나오면 점 P의 좌표는 2, (앞면, 뒷면) 또는 (뒷면, 앞면)이 나오면 점 P의 좌표는 0, (뒷면, 뒷면)이 나오면 점 P의 좌표는 -2이다.

즉, 확률변수 X가 가지는 값은 -2, 0, 2이므로 각각의 확률을 구하면

$\mathrm{P}(X=-2)=\dfrac{1}{4}$

$P(X=0)=\frac{1}{2}$

$P(X=2)=\frac{1}{4}$

따라서 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면

X	-2	0	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

(2) $P(X\le 0)=P(X=-2)+P(X=0)$

$=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$

3 확률변수 X가 가지는 값은 1, 2, 3, 4이므로 각각의 확률을 구하면

$P(X=1)=\frac{{}_5C_2}{{}_6C_3}=\frac{1}{2}$

$P(X=2)=\frac{{}_4C_2}{{}_6C_3}=\frac{3}{10}$

$P(X=3)=\frac{{}_3C_2}{{}_6C_3}=\frac{3}{20}$

$P(X=4)=\frac{{}_2C_2}{{}_6C_3}=\frac{1}{20}$

따라서 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면

X	1	2	3	4	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{20}$	1

따라서 구하는 확률은

$P(X\le 2)=P(X=1)+P(X=2)$

$=\frac{1}{2}+\frac{3}{10}$

$=\frac{4}{5}$

4 (1) $f(x)$는 확률밀도함수이므로

$\int_0^2 f(x)dx=1$

$\int_0^2\left(\frac{1}{4}x+k\right)dx=1$

$\left[\frac{1}{8}x^2+kx\right]_0^2=\frac{1}{2}+2k=1$

$\therefore k=\frac{1}{4}$

(2) $X\ge\frac{1}{2}$인 사건을 A, $X\le 1$인 사건을 B라고 하면

$P\left(X\ge\frac{1}{2}\middle|X\le 1\right)=P(A|B)$

$=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

$P(A\cap B)=P\left(\frac{1}{2}\le X\le 1\right)$이므로

$P(A\cap B)=P\left(\frac{1}{2}\le X\le 1\right)$

$=\int_{\frac{1}{2}}^1\left(\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}\right)dx$

$=\left[\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{4}x\right]_{\frac{1}{2}}^1$

$=\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{1}{32}+\frac{1}{8}\right)$

$=\frac{7}{32}$

$P(B)$를 구하면

$P(B)=P(X\le 1)$

$=\int_0^1\left(\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}\right)dx$

$=\left[\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{4}x\right]_0^1$

$=\frac{1}{8}+\frac{1}{4}$

$=\frac{3}{8}$

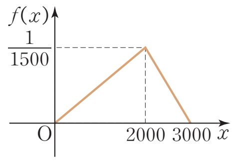
따라서 구하는 확률은

$P\left(X\ge\frac{1}{2}\middle|X\le 1\right)=\frac{\frac{7}{32}}{\frac{3}{8}}=\frac{7}{12}$

5 확률밀도함수 $f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는 1이므로

$\frac{1}{2}\times 3000\times a=1$

$\therefore a=\frac{1}{1500}$



따라서 구입한 전구 2개 중 적어도 1개는 2000시간 이상 사용하게 될 확률은

$1-\{P(X\le 2000)\}^2$

$=1-\left(\frac{1}{2}\times 2000\times\frac{1}{1500}\right)^2$

$=1-\frac{4}{9}$

$=\frac{5}{9}$

2. 평균과 표준편차

바탕 다지기 / P. 111

| 스스로 하기 |

1 3, 9, 2

2 2, -7, 36

1 (1) $\mathrm{E}(X)=(-3)\cdot\frac{1}{4}+(-2)\cdot\frac{1}{4}+2\cdot\frac{1}{4}+3\cdot\frac{1}{4}$

$=0$

$\mathrm{V}(X)=(-3)^2\cdot\frac{1}{4}+(-2)^2\cdot\frac{1}{4}+2^2\cdot\frac{1}{4}$

$+3^2\cdot\frac{1}{4}-0$

$=\frac{13}{2}$

(2) $\mathrm{E}(X)=0$, $\mathrm{V}(X)=\frac{13}{2}$이므로

$\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(3X+3)$

$=3\mathrm{E}(X)+3$

$=3$

$\mathrm{V}(Y)=\mathrm{V}(3X+3)$

$=3^2\,\mathrm{V}(X)$

$=9\cdot\frac{13}{2}=\frac{117}{2}$

2 확률밀도함수 $f(x)=\frac{1}{2}\ (-1\le x\le 1)$이므로

$\mathrm{E}(X)=\int_{-1}^{1}xf(x)dx$

$=\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}x\,dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^2\right]_{-1}^{1}$

$=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}$

$=0$

$\mathrm{V}(X)=\int_{-1}^{1}x^2f(x)dx-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}x^2dx-0$

$=\left[\frac{1}{6}x^3\right]_{-1}^{1}$

$=\frac{1}{6}-\left(-\frac{1}{6}\right)$

$=\frac{1}{3}$

$\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

기본 익히기 / P. 112

1 받을 수 있는 상금을 확률변수 X라고 하면

X	10	5	3	2	1	0	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{67}{100}$	1

$\mathrm{E}(X)=10\cdot\frac{1}{100}+5\cdot\frac{1}{50}+3\cdot\frac{1}{20}+2\cdot\frac{1}{10}$

$+1\cdot\frac{3}{20}+0\cdot\frac{67}{100}$

$=0.7$(만 원)

따라서 참가자 한 사람이 받을 수 있는 상금에 대한 기댓값은 7000원이다.

2 $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$이므로

$\mathrm{E}(X^2)=\mathrm{V}(X)+\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=3+5^2=28$

3 $\frac{1}{4}+2a+\frac{1}{4}+a=1$이므로

$3a+\frac{1}{2}=1$

$\therefore a=\frac{1}{6}$

$\mathrm{E}(X)=1\cdot\frac{1}{4}+2\cdot\frac{1}{3}+3\cdot\frac{1}{4}+4\cdot\frac{1}{6}$

$=\frac{7}{3}$

$\mathrm{V}(X)=1^2\cdot\frac{1}{4}+2^2\cdot\frac{1}{3}+3^2\cdot\frac{1}{4}+4^2\cdot\frac{1}{6}-\left(\frac{7}{3}\right)^2$

$=\frac{19}{18}$

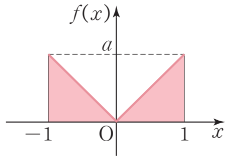
따라서 확률변수 $Y=3X+1$의 분산은

$\mathrm{V}(Y)=\mathrm{V}(3X+1)$

$=3^2\,\mathrm{V}(X)=9\cdot\frac{19}{18}$

$=\frac{19}{2}$

4 (1) 확률밀도함수 $f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는 1이므로



$\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}a=1$

$\therefore a=1$

이때, 확률밀도함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} x & (0\le x\le 1) \\ -x & (-1\le x\le 0)\end{cases}$$

X의 평균 $\mathrm{E}(X)$를 구하면

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X)&=\int_{-1}^{1}xf(x)dx\\&=\int_{-1}^{0}x\cdot(-x)dx+\int_{0}^{1}x\cdot x\,dx\\&=\left[-\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{0}^{1}\\&=-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\\&=0\end{aligned}$$

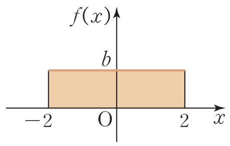
X의 분산 $\mathrm{V}(X)$를 구하면

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(X)&=\int_{-1}^{1}x^2f(x)dx-\{\mathrm{E}(X)\}^2\\&=\int_{-1}^{0}x^2\cdot(-x)dx+\int_{0}^{1}x^2\cdot x\,dx-0\\&=\left[-\frac{1}{4}x^4\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{1}{4}x^4\right]_{0}^{1}\\&=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\\&=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

X의 표준편차 $\sigma(X)$를 구하면

$$\begin{aligned}\sigma(X)&=\sqrt{\mathrm{V}(X)}\\&=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

(2) 확률밀도함수 $f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는 1이므로



$4b=1$

$\therefore b=\frac{1}{4}$

이때, 확률밀도함수 $f(x)$는

$f(x)=\frac{1}{4}$ (단, $-2\le x\le 2$)

X의 평균 $\mathrm{E}(X)$를 구하면

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X)&=\int_{-2}^{2}xf(x)dx=\int_{-2}^{2}\frac{1}{4}x\,dx\\&=\left[\frac{1}{8}x^2\right]_{-2}^{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\\&=0\end{aligned}$$

X의 분산 $\mathrm{V}(X)$를 구하면

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(X)&=\int_{-2}^{2}x^2f(x)dx-\{\mathrm{E}(X)\}^2\\&=\int_{-2}^{2}\frac{1}{4}x^2dx-0\\&=\left[\frac{1}{12}x^3\right]_{-2}^{2}=\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\\&=\frac{4}{3}\end{aligned}$$

X의 표준편차 $\sigma(X)$를 구하면

$$\begin{aligned}\sigma(X)&=\sqrt{\mathrm{V}(X)}\\&=\sqrt{\frac{4}{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$

5 X의 평균 $\mathrm{E}(X)$를 구하면

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X)&=1\times0.05+2\times0.2+3\times0.25+4\times0.4\\&\quad+5\times0.1=3.3\end{aligned}$$

X의 분산 $\mathrm{V}(X)$를 구하면

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(X)&=1^2\times0.05+2^2\times0.2+3^2\times0.25\\&\quad+4^2\times0.4+5^2\times0.1-3.3^2\\&=1.11\end{aligned}$$

X의 표준편차 $\sigma(X)$를 구하면

$\sigma(X)=\sqrt{1.11}$

실력 키우기 / P. 113

1 (1) $a+\frac{a}{2}+a^2=1$이므로

$2a+a+2a^2=2$

$2a^2+3a-2=0$

$(a+2)(2a-1)=0$

$\therefore a=-2$ 또는 $a=\frac{1}{2}$

이때, $a>0$이므로

$a=\frac{1}{2}$

(2) $$\begin{aligned}\mathrm{E}(X)&=(-1)\cdot\frac{1}{2}+0\cdot\frac{1}{4}+1\cdot\frac{1}{4}\\&=-\frac{1}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(X)&=(-1)^2\cdot\frac{1}{2}+0^2\cdot\frac{1}{4}+1^2\cdot\frac{1}{4}-\left(-\frac{1}{4}\right)^2\\&=\frac{11}{16}\end{aligned}$$

2 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면

X	1	2	3	4	5	6	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

$$\mathrm{E}(X)=1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{6}+4\cdot\frac{1}{6}+5\cdot\frac{1}{6}+6\cdot\frac{1}{6}=\frac{21}{6}=\frac{7}{2}$$

$$\mathrm{E}(X^2)=1^2\cdot\frac{1}{6}+2^2\cdot\frac{1}{6}+3^2\cdot\frac{1}{6}+4^2\cdot\frac{1}{6}+5^2\cdot\frac{1}{6}+6^2\cdot\frac{1}{6}=\frac{91}{6}$$

따라서 확률변수 $4X-X^2$의 평균은

$$\mathrm{E}(4X-X^2)=4\mathrm{E}(X)-\mathrm{E}(X^2)=4\cdot\frac{7}{2}-\frac{91}{6}=-\frac{7}{6}$$

3 $f(x)=ax+b\ (0\le x\le 3)$는 확률밀도함수이므로

$$\int_0^3 f(x)dx=1$$

$$\int_0^3 (ax+b)dx=1 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

또 $f(3)=0$이므로

$3a+b=0$

$\therefore b=-3a$

이를 ㉠에 대입하여 풀면

$$\int_0^3 (ax-3a)dx=\left[\frac{a}{2}x^2-3ax\right]_0^3=\frac{9a}{2}-9a=1$$

$\therefore a=-\frac{2}{9}$

따라서 $f(x)=-\frac{2}{9}x+\frac{2}{3}$이므로 확률변수 X의 평균 $\mathrm{E}(X)$와 분산 $\mathrm{V}(X)$를 구하면

$$\mathrm{E}(X)=\int_0^3 xf(x)dx=\int_0^3\left(-\frac{2}{9}x^2+\frac{2}{3}x\right)dx=\left[-\frac{2}{27}x^3+\frac{1}{3}x^2\right]_0^3=-2+3=1$$

$$\mathrm{V}(X)=\int_0^3 x^2f(x)dx-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\int_0^3\left(-\frac{2}{9}x^3+\frac{2}{3}x^2\right)dx-1=\left[-\frac{1}{18}x^4+\frac{2}{9}x^3\right]_0^3-1=-\frac{9}{2}+6-1=\frac{1}{2}$$

4 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면

X	1	2	3	$\cdots$
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}$	$\left(\frac{3}{4}\right)^2\cdot\frac{1}{4}$	$\cdots$

$$\mathrm{E}(X)=1\cdot\frac{1}{4}+2\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}+3\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2\cdot\frac{1}{4}+\cdots$$

$a_n=\frac{n}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$으로 놓고, 제 n항까지의 합을 S_n이라고 하면

$$S_n=1\cdot\frac{1}{4}+\frac{2}{4}\cdot\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^2+\cdots+\frac{n}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$$\frac{3}{4}S_n=\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}+\frac{2}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^2+\frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^3+\cdots+\frac{n}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^n \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠$-$㉡을 하면

$$\frac{1}{4}S_n=1\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^2+\cdots+\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}-\frac{n}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^n$$

$$=\frac{\frac{1}{4}\left\{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right\}}{1-\frac{3}{4}}-\frac{n}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^n$$

$$=1-\left(\frac{3}{4}\right)^n-\frac{n}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^n$$

$$\therefore S_n=4\left\{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n-\frac{n}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^n\right\}$$

따라서 X의 평균 $\mathrm{E}(X)$를 구하면

$$\mathrm{E}(X)=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}4\left\{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n-\frac{n}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^n\right\}=4$$

5 (1) 효주의 원점수 65점은 80점으로 변환되었으므로

$$80=15\left(\frac{65-m}{\sigma}\right)+50$$

$$\sigma=\frac{65-m}{2} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

승오의 원점수 60점은 65점으로 변환되었으므로

$$65=15\left(\frac{60-m}{\sigma}\right)+50$$

$$\sigma=60-m \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$\frac{65-m}{2}=60-m$$

$m-55=0$

$\therefore m=55, \sigma=5$

(2) $Y=15\left(\frac{X-55}{5}\right)+50$

$=3X-115$

이때, $\mathrm{E}(X)=m=55$, $\sigma(X)=\sigma=5$이므로

$\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(3X-115)$

$=3\mathrm{E}(X)-115$

$=50$

$\sigma(Y)=\sigma(3X-115)$

$=3\sigma(X)$

$=15$

3. 이항분포

바탕 다지기 / P. 115

| 스스로 하기 |

1 독립, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$, ${}_{10}\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{10-x}$

2 $\frac{1}{3}$, 60

1 (1) 0, 1, 2, $\cdots$, 100

(2) 씨앗이 발아하는 것은 독립시행이고, 발아율이 20 %이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(100, \frac{1}{5}\right)$을 따른다.

따라서 구하는 확률질량함수는

$\mathrm{P}(X=x)={}_{100}\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{5}\right)^x\left(\frac{4}{5}\right)^{100-x}$

(단, $x=0, 1, 2, \cdots, 100$)

(3) $\mathrm{E}(X)=np$

$=100\cdot\frac{1}{5}=20$

$\mathrm{V}(X)=npq$

$=100\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}=16$

$\sigma(X)=\sqrt{npq}$

$=\sqrt{16}=4$

기본 익히기 / P. 116

1 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(5, \frac{1}{10}\right)$을 따르므로 구하는 확률질량함수는

$\mathrm{P}(X=x)={}_5\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{10}\right)^x\left(\frac{9}{10}\right)^{5-x}$

(단, $x=0, 1, 2, 3, 4, 5$)

2 병뚜껑을 500번 던졌을 때, 윗면이 300번 나왔으므로 병뚜껑을 한 번 던질 때 윗면이 나올 확률은

$\frac{300}{500}=\frac{3}{5}$

병뚜껑의 윗면이 나오는 횟수를 확률변수 X라고 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(5, \frac{3}{5}\right)$을 따르므로 X의 확률질량함수는

$\mathrm{P}(X=x)={}_5\mathrm{C}_x\left(\frac{3}{5}\right)^x\left(\frac{2}{5}\right)^{5-x}$

(단, $x=0, 1, 2, 3, 4, 5$)

이때, 시합에서 이기려면 4번 이상 윗면이 나와야 하므로 구하는 확률은

$\mathrm{P}(X\geq 4)=\mathrm{P}(X=4)+\mathrm{P}(X=5)$

$={}_5\mathrm{C}_4\left(\frac{3}{5}\right)^4\cdot\frac{2}{5}+{}_5\mathrm{C}_5\left(\frac{3}{5}\right)^5$

$=\frac{5\cdot 3^4\cdot 2}{5^5}+\frac{3^5}{5^5}$

$=\frac{1053}{3125}$

3 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}(n, p)$를 따르므로

$\mathrm{E}(X)=np=12 \qquad \cdots\cdots ㉠$

$\sigma(X)=\sqrt{npq}=3$ (단, $q=1-p$) $\qquad \cdots\cdots ㉡$

㉠을 ㉡에 대입하면

$\sqrt{12q}=3$

$q=\frac{3}{4}$

$\therefore p=\frac{1}{4}, n=48$

4 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(10, \frac{1}{2}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=10\cdot\frac{1}{2}=5$

이때, 상금으로 $(2X+100)$원을 받으므로 구하는 상금의 기댓값은

$$\begin{aligned}E(2X+100)&=2E(X)+100\\&=2\times5+100\\&=110(\text{원})\end{aligned}$$

5 확률변수 X는 이항분포 $B\left(100, \frac{1}{5}\right)$을 따르므로

$$E(X)=100\cdot\frac{1}{5}=20$$

$$\begin{aligned}V(X)&=100\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}\\&=16\end{aligned}$$

따라서 X^2의 평균 $E(X^2)$은

$$\begin{aligned}E(X^2)&=V(X)+\{E(X)\}^2\\&=16+20^2\\&=416\end{aligned}$$

실력 키우기 / P. 117

1 1회의 시행에서 같은 색의 공이 나올 확률은

$$\frac{{}_3C_2+{}_2C_2}{{}_5C_2}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$$

확률변수 X는 이항분포 $B\left(10, \frac{2}{5}\right)$를 따르므로 구하는 확률질량함수는

$$P(X=x)={}_{10}C_x\left(\frac{2}{5}\right)^x\left(\frac{3}{5}\right)^{10-x}$$

(단, $x=0, 1, 2, \cdots, 10$)

2 1의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X라고 하면 X는 이항분포 $B\left(10, \frac{1}{6}\right)$을 따르므로 확률변수 X의 확률질량함수는

$$P(X=k)={}_{10}C_k\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{10-k}$$

(단, $k=0, 1, 2, \cdots, 10$)

따라서 상금의 기댓값은

$$\begin{aligned}E(25^k)&=\sum_{k=0}^{10}25^k\cdot{}_{10}C_k\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{10-k}\\&=\sum_{k=0}^{10}{}_{10}C_k\left(\frac{25}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{10-k}\\&=\left(\frac{25}{6}+\frac{5}{6}\right)^{10}\\&=5^{10}\end{aligned}$$

따라서 상금의 기댓값은 5^{10}원이다.

3 확률변수 X는 이항분포 $B\left(18, \frac{1}{3}\right)$을 따른다. 이때

$$\begin{aligned}&\sum_{x=0}^{18}x^2{}_{18}C_x\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{18-x}\\&=E(X^2)\\&=V(X)+\{E(X)\}^2\end{aligned}$$

이므로 $E(X)$와 $V(X)$를 구하면

$$\begin{aligned}E(X)&=18\cdot\frac{1}{3}\\&=6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V(X)&=18\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\\&=4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ &\sum_{x=0}^{18}x^2{}_{18}C_x\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{18-x}\\&=V(X)+\{E(X)\}^2\\&=4+36=40\end{aligned}$$

4 확률변수 X는 이항분포 $B\left(8, \frac{1}{2}\right)$을 따르므로

$$\begin{aligned}E(X)&=8\cdot\frac{1}{2}\\&=4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V(X)&=8\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\\&=2\end{aligned}$$

이때, 확률변수 $(X-a)^2$의 평균 $E((X-a)^2)$을 구하면

$$\begin{aligned}&E((X-a)^2)\\&=E(X^2-2aX+a^2)\\&=E(X^2)-2aE(X)+a^2\\&=V(X)+\{E(X)\}^2-2aE(X)+a^2\\&=2+16-8a+a^2\\&=a^2-8a+18\\&=(a-4)^2+2\end{aligned}$$

따라서 $E((X-a)^2)$의 최솟값은 2이다.

5 예약한 사람 중에서 실제로 탑승하지 않는 사람의 수를 확률변수 X라고 하면 X는 이항분포 $B\left(210, \frac{1}{10}\right)$을 따르므로

$$\begin{aligned}E(X)&=210\cdot\frac{1}{10}\\&=21\end{aligned}$$

실제로 탑승하지 않는 사람의 수가 평균적으로 21명이므로 189명은 탑승을 한다고 할 수 있다.

따라서 남는 좌석 수의 평균은

$200-189=11$(석)

4. 정규분포

바탕 다지기 / P. 119

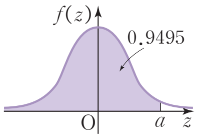
| 스스로 하기 |

1 (1) 0.4750, 0.9750

(2) 0.4987, 0.8400

2 3, 3, 3, -2, 2, 0.4772, 0.9544

1 (1)



$\mathrm{P}(Z \le a) = 0.9495$

$= 0.5 + 0.4495$

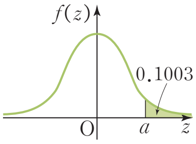
$= 0.5 + \mathrm{P}(0 \le Z \le 1.64)$

이때, $\mathrm{P}(Z \le a) = 0.5 + \mathrm{P}(0 \le Z \le a)$이므로

$\mathrm{P}(0 \le Z \le a) = \mathrm{P}(0 \le Z \le 1.64)$

$\therefore a = 1.64$

(2)



$\mathrm{P}(Z \ge a) = 0.1003$

$= 0.5 - 0.3997$

$= 0.5 - \mathrm{P}(0 \le Z \le 1.28)$

이때, $\mathrm{P}(Z \ge a) = 0.5 - \mathrm{P}(0 \le Z \le a)$이므로

$\mathrm{P}(0 \le Z \le a) = \mathrm{P}(0 \le Z \le 1.28)$

$\therefore a = 1.28$

기본 익히기 / P. 120

1 (1) $\mathrm{P}(X \le 66)$

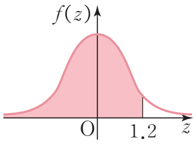
$= \mathrm{P}\left(\frac{X-60}{5} \le \frac{66-60}{5}\right)$

$= \mathrm{P}(Z \le 1.2)$

$= 0.5 + \mathrm{P}(0 \le Z \le 1.2)$

$= 0.5 + 0.3849$

$= 0.8849$



(2) $\mathrm{P}(63 \le X \le 69)$

$= \mathrm{P}\left(\frac{63-60}{5} \le \frac{X-60}{5} \le \frac{69-60}{5}\right)$

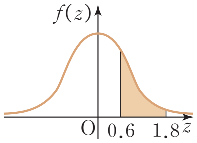
$= \mathrm{P}(0.6 \le Z \le 1.8)$

$= \mathrm{P}(0 \le Z \le 1.8)$

$\quad - \mathrm{P}(0 \le Z \le 0.6)$

$= 0.4641 - 0.2257$

$= 0.2384$



(3) $\mathrm{P}(X \ge 69)$

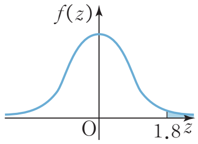
$= \mathrm{P}\left(\frac{X-60}{5} \ge \frac{69-60}{5}\right)$

$= \mathrm{P}(Z \ge 1.8)$

$= 0.5 - \mathrm{P}(0 \le Z \le 1.8)$

$= 0.5 - 0.4641$

$= 0.0359$



(4) $\mathrm{P}(54 \le X \le 63)$

$= \mathrm{P}\left(\frac{54-60}{5} \le \frac{X-60}{5} \le \frac{63-60}{5}\right)$

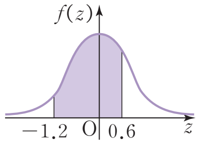
$= \mathrm{P}(-1.2 \le Z \le 0.6)$

$= \mathrm{P}(0 \le Z \le 1.2)$

$\quad + \mathrm{P}(0 \le Z \le 0.6)$

$= 0.3849 + 0.2257$

$= 0.6106$



2 (1) 곡선의 대칭축이 평균이므로

$m_{\mathrm{A}} = m_{\mathrm{B}} < m_{\mathrm{C}}$

(2) 표준편차 σ가 커지면 곡선은 양쪽으로 퍼지므로

$\sigma_{\mathrm{B}} = \sigma_{\mathrm{C}} < \sigma_{\mathrm{A}}$

3 한 개의 동전을 400번 던질 때, 앞면이 나오는 횟수를 확률변수 X라고 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(400,\ \frac{1}{2}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X) = 400 \cdot \frac{1}{2} = 200$

$\mathrm{V}(X) = 400 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 100$

이때, 시행 횟수 $n=400$은 충분히 크므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(200,\ 10^2)$을 따른다.

따라서 확률변수 X가 190 이상 220 이하일 확률은

$\mathrm{P}(190 \le X \le 220)$

$= \mathrm{P}\left(\frac{190-200}{10} \le Z \le \frac{220-200}{10}\right)$

$= \mathrm{P}(-1 \le Z \le 2)$

$= \mathrm{P}(0 \le Z \le 1) + \mathrm{P}(0 \le Z \le 2)$

$= 0.3413 + 0.4772$

$= 0.8185$

4 제품의 무게를 확률변수 X라고 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(30, 5^2)$을 따르므로 불량품으로 판정하여 폐기 처분될 확률은

$\mathrm{P}(X\geq 40)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{X-30}{5}\geq\frac{40-30}{5}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\geq 2)$

$=0.5-\mathrm{P}(0\leq Z\leq 2)$

$=0.5-0.4772$

$=0.0228$

이때, 공장에서 하루에 10000개의 제품을 생산하므로 폐기 처분되는 불량품의 개수는

$10000\times 0.0228=228$(개)

5 최고 혈압을 확률변수 X라고 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(130, 15^2)$을 따르므로 최고 혈압이 고혈압의 범위에 속할 확률은

$\mathrm{P}(X\geq 160)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{X-130}{15}\geq\frac{160-130}{15}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\geq 2)$

$=0.5-\mathrm{P}(0\leq Z\leq 2)$

$=0.5-0.4772$

$=0.0228$

따라서 이 지역의 40대 주민 중에서 최고 혈압이 고혈압에 속하는 사람은 2.28 %이다.

실생활 문제 해결하기 / P. 121

1단계 (1) 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(300, 20^2)$을 따른다.

(2) $\frac{242}{1000}=0.242$

2단계 (1) 0.242

(2) $\mathrm{P}(X\geq c)=\mathrm{P}\left(\frac{X-300}{20}\geq\frac{c-300}{20}\right)$

$=\mathrm{P}\left(Z\geq\frac{c-300}{20}\right)$

3단계 (1) $\mathrm{P}\left(Z\geq\frac{c-300}{20}\right)=0.242$

$0.5-\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq\frac{c-300}{20}\right)=0.242$

$\therefore \mathrm{P}\left(0\leq Z\leq\frac{c-300}{20}\right)=0.258$

$\mathrm{P}(0\leq Z\leq 0.7)=0.258$이므로

$\frac{c-300}{20}=0.7$

$\therefore c=314$

(2) 314점

실력 키우기 / P. 122

1 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따르므로

$\mathrm{P}(X\leq 12)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{X-m}{\sigma}\leq\frac{12-m}{\sigma}\right)$

$=\mathrm{P}\left(Z\leq\frac{12-m}{\sigma}\right)$

$\mathrm{P}(X\geq 26)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{X-m}{\sigma}\geq\frac{26-m}{\sigma}\right)$

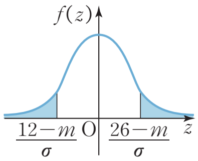
$=\mathrm{P}\left(Z\geq\frac{26-m}{\sigma}\right)$

$\mathrm{P}(X\leq 12)=\mathrm{P}(X\geq 26)$이므로

$\frac{12-m}{\sigma}+\frac{26-m}{\sigma}=0$

$38-2m=0$

$\therefore m=19$



2 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(18, 2^2)$을 따르므로

$\mathrm{P}(a\leq X\leq b)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{a-18}{2}\leq\frac{X-18}{2}\leq\frac{b-18}{2}\right)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{a-18}{2}\leq Z\leq\frac{b-18}{2}\right)$

$=0.8185$

$=0.3413+0.4772$

$=\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1)+\mathrm{P}(0\leq Z\leq 2)$

(i) $\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1)+\mathrm{P}(0\leq Z\leq 2)$

$=\mathrm{P}(-1\leq Z\leq 2)$일 때

$\frac{a-18}{2}=-1,\ \frac{b-18}{2}=2$

$\therefore a=16,\ b=22$

(ii) $\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1)+\mathrm{P}(0\leq Z\leq 2)$

$=\mathrm{P}(-2\leq Z\leq 1)$일 때

$\frac{a-18}{2}=-2,\ \frac{b-18}{2}=1$

$\therefore a=14,\ b=20$

이때, $a>15$이므로

$a=16,\ b=22$

3 등교 시간을 확률변수 X라고 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(20,\ 4^2)$을 따른다.

(1) $\mathrm{P}(12\le X\le 16)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{12-20}{4}\le\frac{X-20}{4}\le\frac{16-20}{4}\right)$

$=\mathrm{P}(-2\le Z\le -1)$

$=\mathrm{P}(1\le Z\le 2)$

$=\mathrm{P}(0\le Z\le 2)-\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$

$=0.4772-0.3413$

$=0.1359$

따라서 등교 시간이 12분 이상 16분 이하인 학생은 전체의 13.59 %이다.

(2) $\mathrm{P}(X\ge 28)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{X-20}{4}\ge\frac{28-20}{4}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\ge 2)$

$=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 2)$

$=0.5-0.4772$

$=0.0228$

이때, $750\times 0.0228=17.1$이므로 등교 시간이 28분 이상인 학생의 수는 약 17명이다.

4 입사 시험 성적을 확률변수 X라고 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(800,\ 50^2)$을 따른다.

응시자 2000명 중에서 238명이 선발되므로 합격할 확률은

$\frac{238}{2000}=0.119$

합격자의 최저 점수를 a라고 하면

$\mathrm{P}(X\ge a)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{X-800}{50}\ge\frac{a-800}{50}\right)$

$=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{a-800}{50}\right)=0.119$

$0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{a-800}{50}\right)=0.119$

$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{a-800}{50}\right)=0.381$

$\mathrm{P}(0\le Z\le 1.18)=0.381$이므로

$\frac{a-800}{50}=1.18$

$\therefore\ a=859$

따라서 합격자의 최저 점수는 859점이다.

5 수학 성적을 확률변수 X라고 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(70,\ 10^2)$을 따른다.

이때, 상위 63등 이내에 들 확률은

$\frac{63}{1000}=0.063$

상위 63등 이내에 들기 위한 최저 점수를 c라고 하면

$\mathrm{P}(X\ge c)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{X-70}{10}\ge\frac{c-70}{10}\right)$

$=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{c-70}{10}\right)=0.063$

$0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{c-70}{10}\right)=0.063$

$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{c-70}{10}\right)=0.437$

$\mathrm{P}(0\le Z\le 1.53)=0.437$이므로

$\frac{c-70}{10}=1.53$

$\therefore\ c=85.3$

따라서 상위 63등 이내에 들기 위해서는 85.3점 이상을 받아야 한다.

2. 통계적 추정

통계적 추정에 들어가기 전에 / P. 125

1 (1) $-1\le x\le 1$

(2) $-2\le x-10\le 2$

$\therefore\ 8\le x\le 12$

(3) $x-1\le -3$ 또는 $x-1\ge 3$

$\therefore\ x\le -2$ 또는 $x\ge 4$

2 (1) $\mathrm{P}(X=0)={}_5\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{2}\right)^5$

$=\frac{1}{32}$

(2) $\mathrm{P}(X\ge 1)=1-\mathrm{P}(X=0)$

$=1-\frac{1}{32}$

$=\frac{31}{32}$

3 (1) ${}_6\mathrm{P}_6=6!$

$=6\times5\times4\times3\times2\times1$

$=720$(가지)

(2) ${}_3\mathrm{C}_2\times{}_3\mathrm{C}_2=3\times3=9$(가지)

4 (1) $\mathrm{P}(X\ge 70)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{X-70}{5}\ge\frac{70-70}{5}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\ge 0)=0.5$

(2) $\mathrm{P}(X\le 80)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{X-70}{5}\le\frac{80-70}{5}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\le 2)$

$=0.5+\mathrm{P}(0\le Z\le 2)$

$=0.5+0.4772=0.9772$

1. 표본조사와 표본평균의 분포

바탕 다지기 / P. 127

| 스스로 하기 |

1 (1) 농어촌

(2) 농어촌

(3) 100

2 (1) 5, 5, 25

(2) 4, 4, 20

(3) 5, 2, 10

1 $m=60, \sigma=6, n=9$이므로 표본평균 $\overline{X}$는

$\mathrm{E}(\overline{X})=m=60$

$\sigma(\overline{X})=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{6}{3}=2$

기본 익히기 / P. 128

1 $m=(-1)\cdot\frac{1}{4}+0\cdot\frac{1}{3}+1\cdot\frac{5}{12}$

$=\frac{1}{6}$

$\sigma^2=(-1)^2\cdot\frac{1}{4}+0\cdot\frac{1}{3}+1^2\cdot\frac{5}{12}-\left(\frac{1}{6}\right)^2$

$=\frac{23}{36}$

표본의 크기 $n=5$이므로 표본평균

$\mathrm{E}(\overline{X})=m=\frac{1}{6}$

$\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n}=\frac{\frac{23}{36}}{5}=\frac{23}{180}$

$\therefore \mathrm{E}(\overline{X}^2)=\mathrm{V}(\overline{X})+\{\mathrm{E}(\overline{X})\}^2$

$=\frac{23}{180}+\frac{1}{36}$

$=\frac{7}{45}$

2 공에 적힌 숫자를 확률변수 X라 하고 X의 확률분포를 표로 나타내면

X	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1

$m=1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{3}+3\cdot\frac{1}{2}$

$=\frac{7}{3}$

$\sigma^2=1^2\cdot\frac{1}{6}+2^2\cdot\frac{1}{3}+3^2\cdot\frac{1}{2}-\left(\frac{7}{3}\right)^2$

$=\frac{5}{9}$

이때, $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{5}{36}$이므로

$\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n}=\frac{\frac{5}{9}}{n}=\frac{5}{9n}=\frac{5}{36}$

$\therefore n=4$

3 전구의 수명 시간 X는 정규분포 $\mathrm{N}(2000, 200^2)$을 따르므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(2000, 20^2)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(2000\le\overline{X}\le 2040)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{2000-2000}{20}\le\frac{\overline{X}-2000}{20}\le\frac{2040-2000}{20}\right)$

$=\mathrm{P}(0\le Z\le 2)$

$=0.4772$

4 2학년 학생의 키 X는 정규분포 $\mathrm{N}(175, 10^2)$을 따르므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(175, 2^2)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(177\le\overline{X}\le 179)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{177-175}{2}\le\frac{\overline{X}-175}{2}\le\frac{179-175}{2}\right)$

$=\mathrm{P}(1\le Z\le 2)$

$=\mathrm{P}(0\le Z\le 2)-\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$

$=0.4772-0.3413$

$=0.1359$

5 모집단의 분포가 정규분포 $N(12,\ 12^2)$을 따르므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(12,\ \left(\frac{12}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따른다. 이때, $P(12\le\overline{X}\le15)=0.4332$이므로

$P(12\le\overline{X}\le15)$

$=P\left(\frac{12-12}{\frac{12}{\sqrt{n}}}\le\frac{\overline{X}-12}{\frac{12}{\sqrt{n}}}\le\frac{15-12}{\frac{12}{\sqrt{n}}}\right)$

$=P\left(0\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{4}\right)$

$=0.4332$

$P(0\le Z\le1.5)=0.4332$이므로

$\frac{\sqrt{n}}{4}=1.5$

$\therefore n=36$

실력 키우기 / P. 129

1 이 빵 하나의 무게를 X라고 하면 X가 정규분포 $N(50,\ 3^2)$을 따르므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N(50,\ 1.5^2)$을 따른다. 이때, $S=4\overline{X}$이므로 구하는 확률은

$P(188\le S\le206)$

$=P\left(\frac{188}{4}\le\overline{X}\le\frac{206}{4}\right)$

$=P(47\le\overline{X}\le51.5)$

$=P\left(\frac{47-50}{1.5}\le\frac{\overline{X}-50}{1.5}\le\frac{51.5-50}{1.5}\right)$

$=P(-2\le Z\le1)$

$=P(0\le Z\le1)+P(0\le Z\le2)$

$=0.3413+0.4772$

$=0.8185$

2 샤프심의 길이 X가 정규분포 $N(80,\ 8^2)$을 따르므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(80,\ \left(\frac{8}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따른다. 이때, $P(\overline{X}\le84)=0.9938$이므로

$P(\overline{X}\le84)$

$=P\left(\frac{\overline{X}-80}{\frac{8}{\sqrt{n}}}\le\frac{84-80}{\frac{8}{\sqrt{n}}}\right)$

$=P\left(Z\le\frac{\sqrt{n}}{2}\right)=0.9938$

$0.5+P\left(0\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{2}\right)=0.9938$

$\therefore P\left(0\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{2}\right)=0.4938$

$P(0\le Z\le2.5)=0.4938$이므로

$\frac{\sqrt{n}}{2}=2.5$

$\therefore n=25$

3 모집단의 분포가 정규분포 $N(m,\ 36^2)$을 따르므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(m,\ \left(\frac{36}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따른다.

이때, $P(|m-\overline{X}|\le8)=0.95$이므로

$P(|m-\overline{X}|\le8)$

$=P\left(\left|\frac{\overline{X}-m}{\frac{36}{\sqrt{n}}}\right|\le\frac{8}{\frac{36}{\sqrt{n}}}\right)$

$=P\left(|Z|\le\frac{2\sqrt{n}}{9}\right)=0.95$

이때, $P(|Z|\le2)=0.95$이므로

$\frac{2\sqrt{n}}{9}=2$

$\therefore n=81$

4 모집단의 분포가 정규분포 $N(50,\ 5^2)$을 따르므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(50,\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)$을 따른다.

이때, 모평균 50의 2 %는 1이므로 표본평균이 모평균보다 2 % 이상 크게 나타날 확률은

$P(\overline{X}\ge51)$

$=P\left(\frac{\overline{X}-50}{\frac{1}{2}}\ge\frac{51-50}{\frac{1}{2}}\right)$

$=P(Z\ge2)$

$=0.5-P(0\le Z\le2)$

$=0.5-0.4772$

$=0.0228$

5 이 도시의 가구당 월 소득을 X라고 하면 X는 정규분포 $N(300,\ 10^2)$을 따르므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N(300,\ 1^2)$을 따른다.

이때, 100가구의 월 소득의 평균과 이 도시의 가구당 월 소득의 평균의 차가 2만 원 이상이 될 확률은

$P(|\overline{X}-300|\ge2)$

$=P(|Z|\ge2)$

$=2\{0.5-P(0\le Z\le2)\}$

$=2\times(0.5-0.4772)$

$=2\times0.0228$

$=0.0456$

2. 모평균과 모비율의 추정

바탕 다지기 / P. 133

| 스스로 하기 |

1 25, 25, 228.55, 241.45

2 1.96, 400, 0.68704

기본 익히기 / P. 134

1 $n=100$, $\bar{x}=1000$, $\sigma=50$이므로

(1) 모평균 m에 대하여 신뢰도 95 %인 신뢰구간은

$$1000-1.96\frac{50}{\sqrt{100}}\le m\le 1000+1.96\frac{50}{\sqrt{100}}$$

$\therefore 990.2\le m\le 1009.8$

(2) 모평균 m에 대하여 신뢰도 99%인 신뢰구간은

$$1000-2.58\frac{50}{\sqrt{100}}\le m\le 1000+2.58\frac{50}{\sqrt{100}}$$

$\therefore 987.1\le m\le 1012.9$

2 $n=100$, $\bar{x}=80$, $\sigma=20$이므로 모평균 m에 대하여 신뢰도 95 %인 신뢰구간은

$$80-1.96\frac{20}{\sqrt{100}}\le m\le 80+1.96\frac{20}{\sqrt{100}}$$

$76.08\le m\le 83.92$

$\therefore a=83.92$

3 표본비율 $\hat{p}=\frac{40}{400}=0.1$이고 $n=400$은 충분히 큰 수이므로 표본비율 $\hat{p}$의 분포는 근사적으로 정규분포를 따른다.

이때, 모비율 p에 대하여 신뢰도 95 %인 신뢰구간은

$$0.1-1.96\sqrt{\frac{0.1\times0.9}{400}}\le p\le 0.1+1.96\sqrt{\frac{0.1\times0.9}{400}}$$

$\therefore 0.0706\le p\le 0.1294$

4 모평균 m에 대하여 신뢰도 95 %인 신뢰구간은

$$\overline{X}-2\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le \overline{X}+2\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

이때, $\overline{X}-0.1\sigma\le m\le\overline{X}+0.1\sigma$이므로

$2\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=0.1\sigma$, $\sqrt{n}=20$

$\therefore n=400$

5 $\bar{x}=80$, $\sigma=11$이므로 모평균 m에 대하여 신뢰도 95 %인 신뢰구간은

$$80-2\frac{11}{\sqrt{n}}\le m\le 80+2\frac{11}{\sqrt{n}}$$

이때, $78\le m\le 82$이므로

$80-2\frac{11}{\sqrt{n}}=78$, $\sqrt{n}=11$

$\therefore n=121$

실력 키우기 / P. 135

1 모평균을 m, 표본의 크기를 n, 표본평균을 $\overline{X}$라고 하면 모평균 m에 대하여 신뢰도 95 %인 신뢰구간은

$$\overline{X}-1.96\frac{40}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{X}+1.96\frac{40}{\sqrt{n}}$$

즉, $|\overline{X}-m|\le 1.96\frac{40}{\sqrt{n}}$

이때, 모평균과 표본평균의 차가 4 g 이하이므로

$1.96\frac{40}{\sqrt{n}}\le 4$

$\therefore \sqrt{n}\ge 19.6$

따라서 $n\ge 384.16$이므로 385개 이상 택해야 한다.

2 모평균의 신뢰도 95 %인 신뢰구간의 길이 $3.92d$는

$3.92d=2\times1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=d$

따라서 모평균의 신뢰도 99 %인 신뢰구간의 길이는

$$2\times2.58\frac{\sigma}{\sqrt{4n}}=2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=2.58d$$

3 신뢰도 98 %인 모평균 m에 대하여

$$\mathrm{P}\left(\overline{X}-\frac{k\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{X}+\frac{k\sigma}{\sqrt{n}}\right)=0.98$$

$$\mathrm{P}\left(-\frac{k\sigma}{\sqrt{n}}\le\overline{X}-m\le\frac{k\sigma}{\sqrt{n}}\right)=0.98$$

$\mathrm{P}(-k\le Z\le k)=0.98$

$\mathrm{P}(|Z|\le k)=0.98$

$\therefore k=2.33$

4 모평균을 m, 표본의 크기를 n, 표본평균을 $\overline{X}$라 하고, $\mathrm{P}(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}$로 놓으면

$$\overline{X}-k\frac{1}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{X}+k\frac{1}{\sqrt{n}}$$

따라서 이 신뢰구간의 길이 l은

$$l=\left(\overline{X}+k\frac{1}{\sqrt{n}}\right)-\left(\overline{X}-k\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=\frac{2k}{\sqrt{n}}$$

$n=4$일 때 $l=2$이므로

$2=\frac{2k}{\sqrt{4}}$, $k=2$

$\therefore l=\frac{4}{\sqrt{n}}$

$l=1$일 때 $\quad 1=\frac{4}{\sqrt{n}} \qquad \therefore n=16$

5 이 정책에 대한 표본의 찬성률을 $\hat{p}$, 표본의 크기를 n이라고 하면 신뢰도 95 %인 신뢰구간의 길이가 8 % 이내이어야 하므로

$2\times 2\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\le 0.08$

$\therefore \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\le\frac{1}{50}$

$\sqrt{n}\ge 50\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}$

$\therefore n\ge 50^2\hat{p}(1-\hat{p}) \qquad \cdots\cdots$ ㉠

이때, ㉠의 우변에서

$50^2\hat{p}(1-\hat{p})=-50^2\left(\hat{p}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{50^2}{4} \qquad \cdots\cdots$ ㉡

n이 어떤 $\hat{p}$에 대해서도 ㉠을 만족하려면 ㉡의 최댓값인 $\frac{50^2}{4}$ 보다 크거나 같아야 하므로

$n\ge\frac{50^2}{4} \qquad \therefore n\ge 625$

실생활 문제 해결하기 / P. 137

1단계 (1) 700

(2) 0.631

2단계 $\hat{p}-1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\le p\le\hat{p}+1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$

3단계 (1) $0.595\le p\le 0.667$

(2) 3.7 %

(3) $0.594\le p\le 0.668$

대단원 확인하기 P. 138, 139

1 (1) 확률변수 X가 가지는 값은 0, 1, 2, 3이므로 각각의 확률을 구하면

$P(X=0)=\frac{{}_4C_0\times{}_4C_3}{{}_8C_3}=\frac{4}{56}=\frac{1}{14}$

$P(X=1)=\frac{{}_4C_1\times{}_4C_2}{{}_8C_3}=\frac{24}{56}=\frac{3}{7}$

$P(X=2)=\frac{{}_4C_2\times{}_4C_1}{{}_8C_3}=\frac{24}{56}=\frac{3}{7}$

$P(X=3)=\frac{{}_4C_3\times{}_4C_0}{{}_8C_3}=\frac{4}{56}=\frac{1}{14}$

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면

X	0	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{14}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{14}$	1

(2) $E(X)=0\cdot\frac{1}{14}+1\cdot\frac{3}{7}+2\cdot\frac{3}{7}+3\cdot\frac{1}{14}$

$=\frac{21}{14}=\frac{3}{2}$

$V(X)=0\cdot\frac{1}{14}+1^2\cdot\frac{3}{7}+2^2\cdot\frac{3}{7}+3^2\cdot\frac{1}{14}-\left(\frac{3}{2}\right)^2$

$=\frac{15}{28}$

2 (1) $f(x)=ax+1\ (0\le x\le 2)$은 확률밀도함수이므로

$\int_0^2 f(x)dx=1$

$\int_0^2 (ax+1)dx=1$

$\left[\frac{a}{2}x^2+x\right]_0^2=2a+2=1$

$\therefore a=-\frac{1}{2}$

(2) $P\left(0\le X\le\frac{1}{2}\right)$

$=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(-\frac{1}{2}x+1\right)dx$

$=\left[-\frac{1}{4}x^2+x\right]_0^{\frac{1}{2}}$

$=\frac{7}{16}$

3 $E(X)=20$, $V(X)=4$이므로

$E(Y)=E(2X-10)$

$=2E(X)-10$

$=2\cdot 20-10=30$

$V(Y)=V(2X-10)$

$=2^2V(X)$

$=4\cdot 4=16$

$\sigma(Y)=\sqrt{16}=4$

4 연착하는 버스의 수를 확률변수 X라고 하면 X는 이항분포 $B\left(20, \frac{1}{10}\right)$을 따르므로

$$\mathrm{P}(X=x)={}_{20}\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{10}\right)^x\left(\frac{9}{10}\right)^{20-x}$$

(단, $x=0, 1, 2, \cdots, 20$)

따라서 연착하는 버스가 1대 이하일 확률은

$\mathrm{P}(X\le1)$

$=\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)$

$={}_{20}\mathrm{C}_0\left(\frac{9}{10}\right)^{20}+{}_{20}\mathrm{C}_1\cdot\frac{1}{10}\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^{19}$

$=1\times0.1216+20\times0.1\times0.1351$

$=0.3918$

5 예약한 사람이 공연에 참석할 확률은 0.95이다. 따라서 예약한 72명 중에서 공연에 참석한 사람의 수를 확률변수 X라고 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}(72,\ 0.95)$를 따르므로

$$\mathrm{P}(X=x)={}_{72}\mathrm{C}_x\cdot0.95^x\cdot0.05^{72-x}$$

(단, $x=0, 1, 2, \cdots, 72$)

한편 좌석이 부족한 것은 $X\ge71$의 경우이므로

$\mathrm{P}(X\ge71)$

$=\mathrm{P}(X=71)+\mathrm{P}(X=72)$

$={}_{72}\mathrm{C}_{71}\cdot0.95^{71}\cdot0.05+{}_{72}\mathrm{C}_{72}\cdot0.95^{72}$

$=72\times0.0262\times0.05+1\times0.0249$

$=0.11922$

6 접속 시간을 확률변수 X라고 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(40,\ 5^2)$을 따르므로 접속 시간이 50분을 넘을 확률은

$\mathrm{P}(X\ge50)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{X-40}{5}\ge\frac{50-40}{5}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\ge2)$

$=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le2)$

$=0.5-0.4772$

$=0.0228$

이때, 통신망 이용자 10000명 중에서 접속 시간이 50분을 넘는 사람의 수는

$10000\times0.0228=228$(명)

7 $m=20,\ \sigma^2=16,\ n=8$이므로

$\mathrm{E}(\overline{X})=m=20$

$\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n}=\frac{16}{8}=2$

따라서 $\overline{X}^2$의 평균 $\mathrm{E}(\overline{X}^2)$을 구하면

$\mathrm{E}(\overline{X}^2)=\mathrm{V}(\overline{X})+\{\mathrm{E}(\overline{X})\}^2$

$=2+20^2=402$

8 이 공장에서 생산되는 전구의 수명 시간을 확률변수 X라고 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(1400,\ 100^2)$을 따르므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(1400,\ \frac{100^2}{n}\right)$을 따른다. 이때, $\mathrm{P}\left(\overline{X}\ge1350+\frac{165}{\sqrt{n}}\right)\ge0.90$이므로

$\mathrm{P}\left(\overline{X}\ge1350+\frac{165}{\sqrt{n}}\right)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{\overline{X}-1400}{\frac{100}{\sqrt{n}}}\ge\frac{-50+\frac{165}{\sqrt{n}}}{\frac{100}{\sqrt{n}}}\right)$

$=\mathrm{P}\left(Z\ge-\frac{\sqrt{n}}{2}+1.65\right)\ge0.90$

$=0.5+\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{2}-1.65\right)\ge0.90$

$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{2}-1.65\right)\ge0.40$

이때, $\mathrm{P}(0\le Z\le1.28)=0.4$이므로

$\frac{\sqrt{n}}{2}-1.65\ge1.28$

$\sqrt{n}\ge5.86$

$\therefore\ n\ge34.3396$

따라서 n의 최솟값은 35이다.

9 (1) $n=25,\ \overline{x}=32.2,\ \sigma=0.5$이므로

모평균 m에 대하여 신뢰도 95 %인 신뢰구간은

$32.2-1.96\frac{0.5}{\sqrt{25}}\le m\le32.2+1.96\frac{0.5}{\sqrt{25}}$

$\therefore\ 32.004\le m\le32.396$

(2) 표본의 크기를 n이라고 하면

$2\times1.96\frac{0.5}{\sqrt{n}}\le0.2$

$\sqrt{n}\ge9.8$

$\therefore\ n\ge96.04$

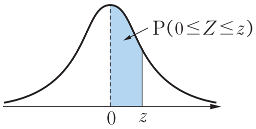
따라서 표본의 크기의 최솟값은 97이다.

10 표본비율 $\hat{p}=\frac{20}{100}=0.2$이고 $n=100$은 충분히 큰 수이므로 $\hat{p}$의 분포는 근사적으로 정규분포를 따른다. 이때, 모비율 p에 대하여 신뢰도 95 %인 신뢰구간은

$$0.2-1.96\sqrt{\frac{0.2\times0.8}{100}}\le p\le0.2+1.96\sqrt{\frac{0.2\times0.8}{100}}$$

$0.1216\le p\le0.2784$

표준정규분포표



z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2518	.2549
0.7	.2580	.2611	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4980	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4983	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.4987	.4987	.4987	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990	.4990
3.1	.4990	.4991	.4991	.4991	.4992	.4992	.4992	.4992	.4993	.4993
3.2	.4993	.4993	.4994	.4994	.4994	.4994	.4994	.4995	.4995	.4995
3.3	.4995	.4995	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4997

난수표

41	10	50	81	22	94	80	71	10	68	23	58	20	21	88	71	29	54	42	84
13	49	57	94	72	78	92	78	78	04	17	00	92	85	09	52	78	15	96	97
33	87	89	24	77	65	37	12	38	63	76	49	69	52	36	11	03	58	23	39
15	91	02	97	10	37	14	47	47	79	81	63	34	22	84	89	77	54	40	37
37	94	89	58	24	29	22	39	42	66	95	14	63	40	46	93	99	89	97	80
48	06	32	88	07	06	19	13	11	04	45	95	73	13	19	11	39	24	24	05
92	65	65	69	32	05	63	75	76	57	26	10	31	31	63	77	83	07	31	14
48	66	49	80	78	34	30	47	61	73	44	31	65	38	69	89	46	83	54	40
23	50	07	82	24	34	88	84	90	39	20	46	32	85	66	22	13	24	41	02
47	02	38	86	81	59	77	46	17	55	54	59	00	99	03	16	34	25	39	50
39	65	34	38	46	26	95	15	80	70	40	06	89	76	54	89	61	27	75	66
90	36	99	74	53	71	05	53	69	01	49	59	53	06	18	52	03	18	40	26
46	60	38	92	08	09	16	06	33	02	13	60	78	83	82	17	16	30	55	71
62	67	74	04	84	75	68	64	11	42	22	88	64	73	77	28	54	94	71	69
21	17	44	02	71	21	59	79	73	18	24	74	77	48	02	32	62	21	14	53
26	28	51	07	60	06	70	82	54	15	47	32	68	27	57	25	93	34	46	17
42	52	33	74	19	92	15	67	44	50	18	71	98	10	65	85	25	63	55	29
01	75	61	32	64	82	26	07	52	58	20	62	50	46	31	25	96	08	42	07
40	43	01	08	73	95	03	72	60	57	11	01	09	16	29	01	43	35	12	89
27	45	34	33	89	67	15	09	44	52	97	29	56	42	65	86	53	36	40	06
70	14	67	62	53	35	13	44	94	15	40	73	62	93	59	85	82	75	98	57
08	19	27	74	15	08	70	74	65	24	48	86	89	31	25	93	37	34	82	89
53	49	10	30	07	77	96	85	15	91	44	39	40	04	22	43	98	84	41	37
52	15	45	85	55	73	68	49	91	91	93	09	46	39	60	04	61	98	28	27
47	08	84	16	05	08	28	75	64	30	96	01	45	66	88	19	99	94	90	85

사진 자료 출처

http://www.imageclick.com/
8쪽 수원성
22쪽 전광판
22쪽 의료기
40쪽 다리
56쪽 바둑

http://www.timespace.co.kr/
113쪽 활

http://www.yonhapnews.co.kr/
22쪽 유물 발굴
76쪽 수영

http://image.newsbank.co.kr/
52쪽 비행기
82쪽 안타
98쪽 페널티 킥
102쪽 투표
123쪽 수능
124쪽 철새

인용 자료 출처

KSA3151난수표 **130쪽**
박한식, 「KS 난수표의 작성과 검정」, 상공부표준국, 1962, **131쪽**
한국통계학회, 「알고보면 재미있는 통계 이야기」, 자유아카데미, 1991, **136쪽**
http://news.chosun.com/ 조선일보, **137쪽**

지 은 이 약 력

이강섭

서울대학교 사범대학 수학교육과 졸업
서울대학교 대학원 계산통계학과 졸업(이학 박사)
제6차, 제7차 고등학교 수학 교과서 집필(공저)
2006년 개정 교육과정 고등학교 수학 교과서 집필(공저)
단국대학교 기획실장, 사범대학 학장
(현) 단국대학교 사범대학 수학교육과 교수
한국수학교육학회 회장
(현) 한국수학교육학회 명예 회장

왕규채

서울대학교 사범대학 수학교육과 졸업
단국대학교 교육대학원 수학교육과 졸업(교육학 석사)
제7차 고등학교 수학 교과서 집필(공저)
2006년 개정 교육과정 고등학교 수학 교과서 집필(공저)
신월중, 영등포여고, 구일고, 구정고, 석관고, 성동고 교사
(현) 서울과학고등학교 교사

송교식

서울대학교 사범대학 수학교육과 졸업
서울대학교 사범대학원 수학교육과 졸업(교육학 석사)
제7차 고등학교 수학 교과서 집필(공저)
2006년 개정 교육과정 고등학교 수학 교과서 집필(공저)
선린중, 석관고, 청담고, 한성과학고 교사
(현) 용산고등학교 교사

양인웅

성균관대학교 사범대학 수학교육과 졸업
성균관대학교 교육대학원 수학교육과 졸업(교육학 석사)
2006년 개정 교육과정 고등학교 수학 교과서 집필(공저)
경동고, 잠실고, 수락고 교사
(현) 경복고등학교 교사

단원별 집필
총괄 진행 이강섭
Ⅰ **적분법** 송교식
Ⅱ **순열과 조합** 이강섭
Ⅲ **확률** 이강섭
Ⅳ **통계** 이강섭

편집 김영호, 한란, 한혜현, 김화신, 박세린
디자인 김태원, 박현신, 김의수
삽화 서영철, 송회석, 양승용, 토리 디자인
사진 이석원
컷 이미영, 김상준, 김윤아

표지 출처
김상구 / Kim Sang-ku / No. 892 / 46×61 cm / 2004

교육과학기술부의 위탁을 받아 **한국교육과정평가원**이 검정 심사를 하였음.

고등학교 적분과 통계 익힘책

2009. 8. 10. 전시본 인쇄 비 매 품
2009. 8. 17. 전시본 발행

지은이 이강섭 외 3인
발행인 (주)지학사 서울시 마포구 동교동 180-20
인쇄인

교과서에 대한 문의사항이나 의견이 있으신 분은 교육과학기술부〈교육과정 · 교과서정보서비스(http://cutis.mest.go.kr)〉를 이용하여 주시기 바랍니다.

내용관련문의 (주)지학사 수학부 전화 02-330-5440 전송 02-325-8009
개별구입문의 사단법인 한국검정교과서(www.ktbook.com) 고객지원팀 02-3663-5409~12